УДК 517.997

МЕТОДЫ УЛУЧШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА СЕТИ ОПЕРАТОРОВ С НЕФИКСИРОВАННЫМИ ВЕРШИНАМИ ГРАФА

В.А. Батурин
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
Россия, 664, Иркутск, Лермонтова ул., 134
E-mail: rozen@icc.ru

В.Н. Сизых
Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, 664074, Иркутск, Чернышевского ул., 15
E-mail: sizykh_vn@mail..ru

Ключевые слова: оптимальное управление, метод сильного улучшения, сеть операторов, уравнение Риккати.

Аннотация: В работе предлагаются методы улучшения первого и второго порядка для задачи оптимального управления на сети операторов с нефиксированными координатами графа. В основе вывода алгоритмов лежит теорема о достаточных условиях оптимальности В.Ф. Кротова. Приводятся условия неулучшаемости управления, тесно связанные с необходимыми и достаточными условиями сильного локального минимума.

1. Введение

В методах последовательных улучшений различают алгоритмы слабого и сильного улучшения. В алгоритмах слабого улучшения ограничивается приращение по управлению, например, в градиентных методах. Для построения алгоритмов сильного улучшения ограничивается приращение фазовой переменной. Для задачи управления с фиксированным графом алгоритмы улучшения получены в работе [1]. Простейший вариант сети операторов – последовательный многоэтапный процесс. С нефиксированным временем этапа и алгоритмы решения задач оптимального управления приведены в работе [2]. Многоэтапный процесс описывает, например, последовательную технологическую цепочку при производстве продукции химической промышленности. Сеть операторов описывает более сложные процессы, например, параллельные и пересекающиеся, когда на выходе получается не один продукт, а несколько. Более сложная модель, когда вершины графа не фиксированы, что создает новые возможности моделирования технологических процессов. Все эти системы управляемы и актуальными являются задачи оптимального управления

Доклад построен следующим образом: формулируется задача оптимального управления, далее приводятся методы слабого и сильного улучшения первого и второго порядка. Специально исследуется случай, когда исходное приближение удовлетворяет принципу максимума Понтрягина, но не доставляет функционалу сильный локальный минимум. Используя необходимые и достаточные условия оптимальности сильного локального минимума, строится специальный алгоритм улучшения.

2. Постановка задачи

Для иллюстрации и понимания метода рассмотрим простейший вариант.

Пусть заданы ориентированный граф (рис. 1) с вершинами $i=\overline{0,N+h}.$Обозначим: A_i – множество индексов точек j таких, что в заданном графе существуют ребра $i\,j,\ j<i$, B_i – множество индексов точек j таких, что в заданном графе существуют ребра $i\,j,\ j>i$, (ξ_1^i,ξ_2^i)– координаты на плоскости, i – вершины графа. Координаты (ξ_1^i,ξ_2^i) не являются фиксированными и могут меняться. Поэтому данный объект будем называть *сетью операторов с нефиксированными вершинами графа*.

Пусть первые k вершин графа являются входными, а последние h вершин – выходными, т.е. $A_i=\varnothing,\quad i=\overline{0,k}$ и $B_i=\varnothing,\quad i=\overline{N+1,\ N+h}$.

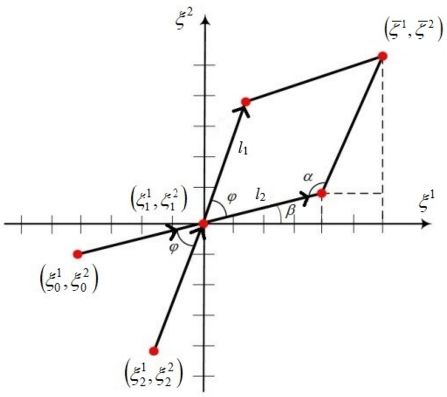

Рис.1. Ориентированный граф.

На каждом ребре состояние процесса описывается своей математической моделью в форме обыкновенных дифференциальных уравнений

(1) $$\frac{dx^{ij}}{dt^{ij}}=f(t_{ij},x^{ij}(t_{ij}),u^{ij}(t_{ij})),$$

где $t_{ij}\in T_{ij}=[\tau_i,\tau_j],\quad i=\overline{0,N},\ j\in B_i,$ концы отрезков τ_i,τ_j – не фиксированы. Далее индексы i,j при времени t будем опускать.

Начальные условия на каждом ребре определяются из следующих соотношений

$$x^{ij}=æ^{ij}(\tau_i),\ i=\overline{0,k},$$

(2) $$x^{ij}(\tau_i)=æ^{ij}(\tau_i,x^{l_1 i}(\tau_i),\ldots,x^{l_p i}(\tau_i)),\ l_1,\ldots,l_p\in A_i,\ i=\overline{k+1,N}.$$

Функции $x^{ij}(t)$ – кусочно дифференцируемы и принимают значения в евклидовом пространстве $R^{n(ij)}$; $u^{ij}\in V_{ij}\subset R^{m(ij)}$ – кусочно непрерывны; $æ^{ij}$ – заданные функции.

Обозначим $x^i=\{x^{ij}(t)\colon j\in B_j,\ i=0,N\}$, $u^i=\{u^{ij}(t)\colon j\in B_i,\ i=0,N\}$, $x=(x^0(t),x^1(t)\ldots,x^N(t))$, $u=(u^0(t),u^1(t),\ldots,u^N(t))$.

Множество троек $(x,\ u,\ T)$, удовлетворяющих перечисленным условиям, а также дифференциальным связям (1) и начальным условиям (2), будем называть *множеством допустимых* и обозначать D. Предполагается, что $D\neq\varnothing$.

Определим функционал $I(x,u,T)=F(x^{SN+1,N+1}(\tau_{N+1}),\ldots,\ x^{SN+h,N+h}(\tau_{N+h}))$, который требуется минимизировать. Здесь $S_i\in A_i$.

Пусть $\varphi^{ij}(t,x^{ij})$ – непрерывно дифференцируемая по своим аргументам функция, $t\in[t_i,t_j]$, $i=0,N$; $j\in B_i$.

Обозначим $x_0{}^{ij} = x^{ij}(t_i), x_1{}^{ij} = x^{ij}$ и введем следующие конструкции:

$$R^{ij}(t, x^{ij}, u^{ij}) = \varphi_x{}^{ij\prime} f^{ij}(t, x^{ij}, u^{ij}) + \varphi_t{}^{ij}(t, x^{ij}),$$

$$G^{ij}(x_0{}^{ij}, x_1{}^{ij}) = \varphi^{ij}(t_j, x_1{}^{ij}) - \varphi^{ij}(t_i, x_0{}^{ij}),$$

где «′» означает знак транспонирования.

Обозначим $\Gamma(x_0, x_1, T) = F(x_1{}^{SN+1,N+1}, x_1{}^{SN+h,N+h}) + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j\in B_i} G(x_0^{ij}, x_1^{ij})$ и введём функционал Лагранжа L [4], который совпадает с функционалом I на множестве D

$$L = \Gamma(x_0, x_1, T) - \sum_{i=0}^{N}\sum_{j\in B_i}\int_{\tau_i}^{\tau} R^{ij}(t, x^{ij}, u^{ij})dt.$$

Пусть $\mu^{ij}(t) = \sup\limits_{x^{ij}, u^{ij}\in U_{ij}} R(t, x^{ij}, u^{ij}),$

$$m = \inf\,[F(x_1^{S_{N+1,N+1}}, \dots, x_1^{S_{N+h,N+h}}) + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j\in B_i} G^{ij}(x_{ij}^{0}, x_1^{ij})].$$

Тогда имеет место аналог теоремы Кротова для стандартных задач оптимального уравнения [11].

Теорема 1. *Пусть имеется последовательность* $\{x_s, u_s, T_s\} \subset D$ *и функции* $\varphi^{ij}(t, x^{ij})$ *такие, что выполнены условия* 1-2:

1. $\int_{\tau_{is}}^{\tau_{is}}(\mu^{ij}(t) - R^{ij}\left(t, x_s^{ij}(t), u_s^{ij}(t)\right)dt \to 0;$
2. $\sum_{i=0}^{N}\sum_{j\in B_i} G^{ij}(x_{0s}^{ij}, x_{1s}^{ij}) \to m.$

Тогда последовательность $\{(x_s, u_s, T_s)\}$ *– минимизирующая, и всякая минимизирующая последовательность удовлетворяет условиям* 1-2.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы Кротова для задач оптимального управления обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

2. Основные результаты

В докладе формулируются в виде алгоритмов методов последовательного улучшения по характеристикам первого и второго порядка (уравнений Риккати), в том числе и в случае существования особой точки этого уравнения.

3. Пример

Рассмотрим граф, у которого три вершины имеют координаты $(\xi_0{}^1, \xi_0{}^2)$, $(\xi_1{}^1, \xi_1{}^2)$, $(\xi_2{}^1, \xi_2{}^2)$ (Рис.2), отрезки времени между вершинами $[\tau_0, \tau_1]$ и $[\tau_1, \tau_2]$. Предположим, что точки $(\xi_0{}^1, \xi_0{}^2)$ и $(\xi_2{}^1, \xi_2{}^2)$ фиксированы, а точка $(\xi_1{}^1, \xi_1{}^2)$ не фиксирована. Соответственно, фиксированы τ_0, τ_2 и не фиксирован момент времени τ_1. На этом простейшем варианте продемонстрируем вывод алгоритмов, исследуем свойства релаксационности и проиллюстрируем работу алгоритмов на примерах. Вектор $\overrightarrow{(\xi_0^1, \xi_0^2)\,(\xi_1^1, \xi_1^2)}$ направлен в сторону точки $(\xi_1{}^1, \xi_1{}^2)$, вектор $\overrightarrow{(\xi_2^1, \xi_2^2)\,(\xi_1^1, \xi_1^2)}$ направлен в сторону точки $(\xi_1{}^1, \xi_1{}^2)$. Найдем сумму этих векторов и определим координаты $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)$.

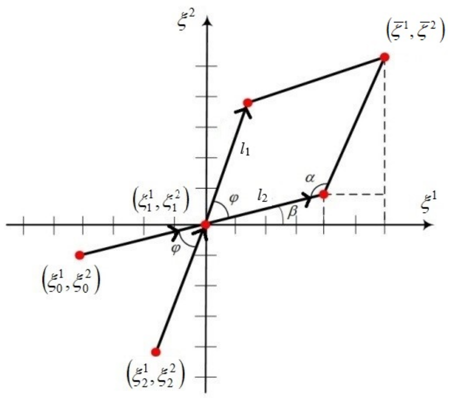

Рис. 2. Ориентированный граф. Простейший вариант.

Координаты точки $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)$ рассчитываются по следующим формулам:

(3) $$\bar{\xi}^1 = l_1 \cos\beta + l_2 \cos\gamma, \quad \bar{\xi}^2 = l_1 \sin\beta + l_2 \sin\gamma,$$
$$\cos\beta = \xi_1^1 / \sqrt{(\xi_1^1)^2 + (\xi_1^2)^2}, \ \gamma = \alpha + \beta, \ \alpha = 180° - \varphi.$$

Пример (рис. 2)

Ребро 1	Ребро 2
$\dot{x} = u,$	$\dot{y} = v,$
$x_1(0) = 0,$	$y(\tau) = x(\tau),$
$t\epsilon[0, \tau],$	$t\epsilon[\tau, T],$
$I_1 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\tau \left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt;$	$I_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\tau^T \left(v^2(t) - y^2(t)\right)dt.$

Общий функционал равен: $I = I_1 + I_2$.

Координаты вершины графа ξ_0=(-4,-1); ξ_1=(0,0), ξ_2=(-2,-4). Точки ξ_0, ξ_2 фиксированы, ξ_1 – не фиксирована, $\tau_1 = \sqrt{87}$.

В качестве начального приближения выберем $u^I(t)=0$, $v^I(t)=0$. Функционал равен: $I_1(x^I, u^I)=0$.

Соответственно, траектории $x^I(t)=0$, $y^I(t)=0$ и, поэтому функционал I_1 достигает абсолютного минимума.

Подробнее рассмотрим второй этап. Для этого рассмотрим задачу улучшения:

$$\dot{y} = v, I_2 = \tfrac{1}{2}\int_\tau^T \left(v^2(t) - y^2(t)\right)dt, y(\tau) = 0, v^I(t) = 0.$$

Выпишем функцию $H = \psi v - \alpha/2 \cdot (v^2 - y^2)$ и найдем производные

$$H_y = \alpha y, \ H_{yy} = \alpha, H_{y\psi} = 0, \qquad H_v = \psi - \alpha v, \ H_{vv} = -\alpha, H_{\psi y} = 0, H_{\psi v} = 1.$$

Уравнение для ψ:

$$\dot{\psi}=0, \psi(T)=0, \psi(\tau)=0, t \in [\tau, T].$$

Уравнение для σ:

$$\dot{\sigma}=-\alpha+(1-2\alpha)\sigma^2, \sigma(T)=0, \alpha \in [0,1].$$

Его решение:

$$\sigma = \sqrt{\tfrac{\alpha}{2\alpha-1}}\,\mathrm{tg}(T-t)\sqrt{\tfrac{2\alpha-1}{\alpha}}, \ \alpha > \tfrac{1}{2}.$$

При $\alpha=1$ $\sigma=\mathrm{tg}(T-t)$. Особая точка находится из уравнения $\cos(T-t)=0$, $t^*=T-\pi/2$. Если $t^*<\tau$, то в этой задаче особой точки нет. Управление $v(t)=0$ доставляет функционалу минимум: $I_2=0$.

Рассмотрим случай $t^*>\tau$. Здесь особая точка $t^*(\alpha)$ находится из уравнения

$$(T-t)\sqrt{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}=\frac{\pi}{2}.$$

Параметр α подберем так, чтобы $t^*(\alpha)=\tau$, $\alpha=K^2/(2K^2-1)$, где $K=(T-\tau)^2/2$. Тогда получим уравнение

$$\dot{y}^{II}=\sigma(t)y^{II},\ \ y^{II}(\tau)=0.$$

Его решение: $y=C\cos\left((t-T)\sqrt{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}\right)$.

Отметим, что $\cos(T-\tau)\sqrt{(2\alpha-1)/\alpha}=0$, и последнее уравнение имеет бесконечно много решений при произвольной постоянной C. Улучшающее управление равно

$$v^{II}=-C\sin\left((t-T)\sqrt{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}\right)\sqrt{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}.$$

Значение функционала равно

$$I_2(y^{II},v^{II})=\int_\tau^T((v^{II})^2-(y^{II})^2)dt=C^2\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}\right).$$

Нетрудно показать, что при $\alpha\in(0.5,\ 1)$ выражение в скобках отрицательное, т.е. улучшение произошло.

Рассмотрим еще один вариант. Если τ – фиксированная величина и нет особой точки при $\alpha=1$ на $[\tau,\ T]$, то исходные управления доставляют функционалу I минимум. Другая ситуация: τ – не фиксировано. Исследуя уравнение Риккати на предмет существования особой точки на $(0,\ T)$ при управлении $v^I(t)=1$ вплоть до момента времени $t=0$, приходим к выводу: если особая точка существует, то начальное приближение улучшаемо; а если не существует, то $u^I(t)=0$, $v^I(t)=0$ доставляет функционалу I минимум.

4. Заключение

Таким образом, в докладе предложены методы последовательного улучшения первого и второго порядков для задачи оптимального управления на сети операторов с нефиксированными вершинами графа. Приведены условия неулучшаемости для метода первого порядка – равенство градиента нулю. Для метода второго порядка приведены условия улучшаемости, и в случае равенства градиента нулю, но существования особой точки уравнения Риккати, условия неулучшаемости имеют место хотя бы на одном из этапов. Работа алгоритмов проиллюстрирована на тестовом примере.

Список литературы

1. Гурман В.И., Расина И.В. Сети дискретных операторов // Программные системы: теория и приложения. 2016. С. 71-78.
2. Baturin V.A., Sizykh V.N. Approximate methods of the solution of an optimal control problem on an operators network // Journal of Physics Conference Series. 2021. No. 1964. DOI: 10.1088/1742-6596/1864/1/012046.