УДК 517.977

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

В.А. Срочко
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, К. Маркса ул., 1
E-mail: srochko@math.isu.ru

А.В. Аргучинцев
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, К. Маркса ул., 1
E-mail: arguch@math.isu.ru

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, целевой функционал с весовыми коэффициентами, оптимизация параметров, минимизация числа обусловленности.

Аннотация: На множестве ступенчатых управляющих функций рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления с весовыми коэффициентами и произвольными матрицами в квадратичном целевом функционале. В качестве критерия качества допустимого набора параметров предлагается выбрать число обусловленности итоговой матрицы, которое выражается через границы ее спектра. В результате построены задачи оптимизации параметров, которые обеспечивают сильную выпуклость целевой функции по управляющим переменным вместе с относительно хорошей обусловленностью соответствующей задачи квадратичного программирования.

1. Введение

В теории оптимального управления линейно-квадратичные задачи традиционно занимают приоритетное место в силу своей сохраняющейся актуальности. Данная работа продолжает направление исследований, представленное в публикациях [1,2], и связана с регуляризацией невыпуклых линейно-квадратичных задач с ограничением на кусочно-постоянное управление и параметрами в квадратичном целевом функционале. В указанных статьях получены конструктивные условия на параметры, обеспечивающие функционалу свойства выпуклости, либо вогнутости по управлению, что открывает возможности эффективного численного решения рассматриваемой задачи.

В настоящей работе ликвидируется неопределенность в выборе параметров регуляризации. Вводится критерий качества допустимого выбора. Это число обусловленности итоговой матрицы квадратичной формы, которое выражается через границы ее спектра, что вполне согласуется со спектральными условиями на параметры. Отсюда естественно возникает задача минимизации числа обусловленности матрицы вторых производных целевой функции на множестве параметров, гарантирующих ей положительную определенность. Приводится линеаризованный вариант задачи, когда минимизируется дробно-линейная оценка сверху числа обусловленности при условии положительности знаменателя.

Полученные задачи оптимизации содержат три параметра и после приемлемой нормировки могут решаться в приближенном варианте простым методом перебора на двухиндексной сетке допустимых значений параметров. В целом предлагаемая процедура поиска параметров регуляризации обеспечивает сильную выпуклость целевой функции по управляющим переменным вместе с относительно хорошей обусловленностью соответствующей задачи квадратичного программирования.

2. Постановка задачи. Конечномерная модель

Используя стандартные обозначения $t \in [t_0, T]$, $u(t) \in \Re$, $x(t) \in \Re^n$, рассмотрим задачу на минимум квадратичного функционала

$$\Phi(u,x) = 1/2\ \alpha\langle x(T), Px(T)\rangle + 1/2 \int_{t_0}^{T} [\beta\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \gamma u^2(t)]dt \tag{1}$$

применительно к линейной системе

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,\ x(t_0) = x^0 \tag{2}$$

с двусторонними ограничениями на управление

$$u(t) \in [u_-, u_+],\ t \in [t_0, T]. \tag{3}$$

Перечислим основные условия на параметры задачи (1)–(3):
– функции $Q(t)$, $A(t)$, $b(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0, T]$;
– матрицы P, $Q(t)$ симметричны;
– параметры α, β, γ положительны.

Определим множество допустимых управлений. Введем на отрезке $[t_0, T]$ сетку узлов $\{t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = T\}$ с условиями $t_j = t_{j-1} + h_j$, $h_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Выделим промежутки $T_1 = [t_0, t_1]$, $T_j = (t_{j-1}, t_j]$, $j = 2, \ldots, m$, вместе с соответствующими характеристическими функциями $\chi_1(t)$, $\chi_j(t)$, $t \in [t_0, T]$. Для вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ введем множество допустимых значений

$$Y = \{y \in \Re^m : y_j \in [u_-, u_+],\ j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

и сформируем управление

$$u(t,y) = \sum_{j=1}^{m} y^j \chi_j(t),\ t \in [t_0, T], y \in Y. \tag{4}$$

Это кусочно-постоянная функция со значениями y_j на заданных промежутках T_j, удовлетворяющая ограничениям (3).

Рассмотрим решение $x(t,y)$ задачи Коши (2), соответствующее управлению $u(t,y)$. Для получения явной зависимости решения от y определим следующие объекты:

$x^0(t)$ – решение (2) при нулевом управлении;

$B_\chi(t) \in \Re^{n\times m}$ – матрица столбцов $b(t)\chi_j(t)$, $j=1,2,\dots,m$;

$X(t) \in \Re^{n\times m}$ решение задачи Коши для матричной системы

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B_\chi(t),\ X(t_0) = O,$$

где O – нулевая матрица.

В этих обозначениях имеет место представление

$$x(t,y) = x^0(t) + X(t)y,\ t \in [t_0, T]. \tag{5}$$

Проверим дифференциальное уравнение для $x(t,y)$, учитывая, что

$$B_\chi(t)y = \sum_{j=1}^{m} b(t)\chi_j(t)y_j = b(t)u(t,u).$$

Тогда

$$\dot{x}(t,y) = A(t)x^0(t) + A(t)X(t)y + b(t)u(t,y) = A(t)x(t,y) + b(t)u(t,y),$$

что и подтверждает формулу (5).

Рассмотрим далее целевой функционал (1) для $u = u(t,y)$, $x = x(t,y)$. Используя представления (4), (5), после простых преобразований приходим к целевой функции $\varphi(y)$ следующей структуры:

$$\varphi(y) = 1/2\ \langle y, (\alpha P_1 + \beta Q_1 + \gamma H)y\rangle + \langle y, \alpha p^0 + \beta q^0\rangle + \Phi(0, x^0(t)). \tag{6}$$

Здесь введены обозначения

$$P_1 = X^T(T)PX(T),\ p^0 = X^T(T)Px^0(T);$$

$$Q_1 = \int_{t_0}^{T} X^T(t)Q(t)X(t)dt,\ q^0 = \int_{t_0}^{T} X^T(t)Q(t)x^0(t)dt;\ \ H = diag(h_1, h_2, \dots, h_m).$$

В результате первоначальная задача (1)–(3) в классе допустимых управлений (4) формулируется в конечномерном варианте

$$\varphi(y) \to \min,\ y \in Y. \tag{7}$$

Отметим, что симметричные матрицы P_1, Q_1 сохраняют свойства знакоопределенности матриц P и $Q(t)$ соответственно.

3. Оптимизационный выбор параметров

В рамках задачи (7) обеспечим функции $\varphi(y)$ свойство сильной выпуклости с помощью положительных параметров α, β, γ. Соответствующие условия сформулируем через экстремальные собственные значения $\lambda_{\min}(.)$, $\lambda_{\max}(.)$ возникающих симметричных матриц. Будем использовать экстремальные представления

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{\langle y,y\rangle=1} \langle y, Ay\rangle,\ \lambda_{\max}(A) = \max_{\langle y,y\rangle=1} \langle y, Ay\rangle. \tag{8}$$

Выделим матрицу квадратичной формы в выражении для $\varphi(y)$:

$$S(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha P_1 + \beta Q_1 + \gamma H.$$

Свойство сильной выпуклости функции $\varphi(y)$ эквивалентно неравенству

$$\lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) > 0. \tag{9}$$

При этом число обусловленности матрицы $S(\alpha,\beta,\gamma)$ в спектральной норме выражается по формуле

$$cond\ S(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\lambda_{\max}(S(\alpha,\beta,\gamma))}{\lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma))}. \tag{10}$$

Отсюда естественно возникает параметрическая задача оптимизации обусловленности матрицы S при условии ее положительной определенности:

$$cond\ S(\alpha,\beta,\gamma) \to \min,\ \lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) > 0. \tag{11}$$

Проведем упрощение спектральной задачи (11) на основе линеаризации собственных значений в (10) относительно параметров α, β, γ.

Используя представление (8), получаем следующие оценки (экстремум суммы и сумма экстремумов):

$$\lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) \geqslant \alpha\lambda_{\min}(P_1) + \beta\lambda_{\min}(Q_1) + \gamma\lambda_{\min}(H) = s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\lambda_{\max}(S(\alpha,\beta,\gamma)) \leqslant \alpha\lambda_{\max}(P_1) + \beta\lambda_{\max}(Q_1) + \gamma\lambda_{\max}(H) = s_{\max}(\alpha,\beta,\gamma).$$

Кроме того, отметим, что в силу диагональности матрицы H

$$\lambda_{\min}(H) = \min_{1\leqslant j\leqslant m} h_j = h_{\min},\ \lambda_{\max}(H) = \max_{1\leqslant j\leqslant m} h_j = h_{\max}.$$

В результате получаем оценку сверху

$$cond\ S(\alpha,\beta,\gamma) \leqslant \frac{s_{\max}(\alpha,\beta,\gamma)}{s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma)},$$

что приводит к задаче на минимум дробно-линейной функции с условием положительности знаменателя

$$\frac{s_{\max}(\alpha,\beta,\gamma)}{s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma)} \to \min,\ s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma) > 0. \tag{12}$$

Отметим, что это условие гарантирует выполнение неравенства (9), то есть положительную определенность матрицы $S(\alpha, \beta, \gamma)$. Более того, поскольку $\lambda_{\min}(H) > 0$, то найдется допустимый набор параметров $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ с условием $s_{\min}(\alpha, \beta, \gamma) > 0$. Это означает, что ограничения строгой положительности в задачах (11), (12) содержательны.

Таким образом, спектральные задачи (11), (12) поиска параметров α, β, γ обеспечивают сильную выпуклость функции $\varphi(y)$ вместе с относительно хорошей обусловленностью задачи (7). В этих условиях задача квадратичного программирования (7) с простейшими ограничениями допускает эффективное численное решение за конечное число итераций методами особых точек, сопряженных градиентов или опорным методом [3, 4].

Обсудим вопрос о решении параметрических задач (11), (12). Во-первых, в качестве альтернативы дробным целевым функциям можно минимизировать разность между числителем и знаменателем при тех же ограничениях. Для задачи (11) это будет разность между границами спектра матрицы S, а задача (12) становится линейной по своим переменным. Кроме того, представляется целесообразной некоторая нормировка параметров, например, по правилу $\alpha + \beta + \gamma = 1$. В результате приближенное решение задач (11), (12) можно проводить перебором значений целевой функции на сетке $\{\alpha_i,\ \beta_j,\ \gamma_k\}$. Возможны, конечно, и другие варианты согласованного выбора параметров в рамках задач (11), (12).

4. Заключение

Предлагаемые задачи на минимум чисел обусловленности при условиях знакоопределенности соответствующих матриц хорошо завершают в идейном плане технологию параметрической регуляризации квадратичного функционала в линейной системе управления. Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с расширением класса рассматриваемых задач.

Исследование А.В. Аргучинцева выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296/.

Список литературы

1. Аргучинцев А.В., Срочко В.А. Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, Вып. 1. С. 179–187.
2. Аргучинцев А.В., Срочко В.А. Решение линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-постоянных управлений с параметризацией функционала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, №. 3. С. 5–16.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.
4. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2005. 304 с.