УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Д.В. Хлопин

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, С.Ковалевской ул., 16

E-mail: khlopin@imm.uran.ru

Ключевые слова: задачи управления, управление на бесконечном промежутке, необходимые условия оптимальности, условие трансверсальности, линейные системы с периодическими коэффициентами.

Аннотация: доклад посвящен особенностям необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления на бесконечном промежутке, присущим даже линейным управляемым системам. Для достаточно общей линейной системы показывается необходимое для оптимальности краевое условие на сопряженную переменную, удовлетворяющую принципу максимума Л.С. Понтрягина. При этом не требуются никакие априорные предположения на асимптотические свойства целевого функционала, который в пределе может уходить и в бесконечность, и не быть даже полунепрерывным снизу, не требуются также никаких априорных асимптотических предположений на фундаментальную матрицу линейной системы.

1. Мотивирующий пример

В недавних работах [4, 5] ряд экономических моделей оптимального управления возобновляемым ресурсом был сведен к следующей задаче на бесконечном промежутке:

$$\text{минимизировать } \int_0^\infty e^{-\varrho\tau}\Big[\frac{u^2(\tau)}{2}+y(\tau)-u(\tau)\Big]\,d\tau$$
$$\text{в условиях } \frac{dy(t)}{dt}=\beta u(t)-\delta(t)y(t) \text{ п.в.},\ y(0)=x_*>0,$$
$$u(t)\in U=[0,1],\ x(t)\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0.$$

Здесь ϱ и $\beta\neq 0$ – некоторые числа, а функция $\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ измерима по Лебегу, локально суммируема и 1-периодическая. В отличие от работы [5], нас, как и в [4], будет прежде всего интересовать не существование оптимального решения, а методы его поиска.

Для поиска оптимального управления можно применить принцип максимума Л.С. Понтрягина, однако в этих задачах он обычно не содержит [6] условия трансверсальности для сопряженной траектории. Такое необходимое краевое условие [8] на бесконечности, совместимое с принципом максимума, позволяет однозначно (см. [8, Example 1]) восстановить оптимальное управление $\hat{u}(\cdot)$ при $R = \varrho + \int_0^1 \delta(\tau)\,d\tau > 0$, однако формально не обосновано при $R < 0$. Дело в том, что основные результаты работы [8] применимы только при кажущимся естественным предположении полунепрерывности снизу функционала качества по фазовой переменной в точке $x = x_*$ при фиксации оптимального управлении. Однако даже в столь простом примере, как выше, в случае $R < 0$ сколь угодно малое изменение начального условия может дать не только бесконечно большое ухудшение функционала качества, так и его бесконечно большое его улучшение. В частности, это означает, что функционал качества перестает быть даже полунепрерывным снизу по фазовой переменной, а значит применить результат [8] напрямую нельзя. Отметим, что результаты, к примеру, [1, 4] также не позволяют рассмотреть случай $R < 0$.

Вся дальнейшая часть этого тезиса посвящена обходу в рамках получения необходимых условий оптимальности этого технического требования от функционала качества хотя бы для линейной по фазовой переменной системы.

2. Общая постановка

Рассмотрим более общую задачу:

$$\begin{aligned}
&\text{минимизировать } \int_0^\infty e^{-\varrho\tau}\big[g(u) + c^T y(\tau)\big]\,d\tau \\
&\text{в условиях } \frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + Bu(t) \text{ п.в., } y(0) = x_*, \qquad (1)\\
&u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p,\ x(t) \in \mathbb{R}^m,\ t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Далее будем считать, что U выпукло, функция $g : U \to \mathbb{R}$ – строго выпукла, ϱ – некоторое число, $A(t), B, c$ – матрицы и вектор подходящих размерностей; наконец, отображение $t \mapsto A(t)$ будем предполагать измеримым по Лебегу и локально суммируемым.

Наложенных условий на систему достаточно, чтобы были выполнены предположения [8, $(H1)$–$(H6)$], более того, правая часть управляемой системы непрерывно дифференцируема по фазовой переменной, для любого измеримого управления $u(\cdot)$ решение управляемой системы $y(x, u; \cdot)$ для каждого начального условия x существует на всей полуоси и непрерывно дифференцируемо по x. Введем

$$J(x, u; T) = \int_0^T e^{-\varrho\tau}\big[g(u(\tau)) + c^T y(x, u; \tau)\big]\,d\tau.$$

Будем говорить, что управление $\hat{u}(\cdot)$ слабо обгоняющее в задаче (1) [3], если для всякого другого допустимого в этой задаче управления $u(\cdot)$ выполнено:

$$J^*(x) = \limsup_{T\to\infty}[J(x_*, u; T) - J(x_*, \hat{u}; T)] \in [0, +\infty].$$

Этот критерий – один из самых слабых [3] критериев глобальной оптимальности в задачах на бесконечном промежутке; о его локальных вариантах см. [8].

Всюду далее предположим, что $\hat{u}(\cdot)$ – некоторое, возможно нам неизвестное, слабо обгоняющее оптимальное управление. Порожденную им траекторию управляемой системы обозначим, для краткости, через $\hat{y}(\cdot) = y(x_*, \hat{u}; \cdot)$.

3. Необходимое условие

Теорема 1. *Для всякого слабо обгоняющего в задаче* (1) *управления* $\hat{u}(\cdot)$ *найдется ненулевая пара: число* $\hat{\lambda} \in \{0,1\}$ *и сопряженная траектория* $\hat{\psi}(\cdot)$, *решающая*

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \lambda e^{-\varrho t} c - A^T \psi(t), \tag{2}$$

для которой в почти каждый момент времени управление $\hat{u}(t)$ *максимизирует на* U *гамильтониан*

$$\hat{\psi}^T(t)\big(A(t)\hat{y}(t) + Bu\big) - \lambda e^{-\varrho t}\big(g(u) + c^T \hat{y}(t)\big); \tag{3}$$

при этом выполнено следующее условие трансверсальности: для некоторых неограниченно возрастающей последовательности $T_n \in \mathbb{R}$ *и сходящейся к* $(\hat{\lambda}, \hat{\psi}(\cdot))$ *последовательности удовлетворяющих* (2) *пар* $(\lambda_n, \psi_n(\cdot))$, *выполнено* $\psi_n(T_n) = 0$.

В ходе доказательства вектор c будем считать ненулевым, поскольку иначе $\hat{\psi}(\cdot) = \psi_n(\cdot) = 0$, $\hat{\lambda} = \lambda_n = 1$ искомые.

Сначала введем множества $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ правилами:

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, J^*(x) \in [0, +\infty]\},\ \mathcal{D} = \{(t,z) \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, t \geqslant 0,\ z = y(x, \hat{u}; t)\}.$$

Заметим, что $x_* \in \mathcal{C}$ и график оптимальной траектории $\hat{y}(\cdot)$ заведомо лежит в $\mathcal{D}$. Значит $\hat{u}(\cdot)$ останется слабо обгоняющим, если исходную задачу так дополнить асимптотическим терминальным ограничением:

$$\begin{aligned} \text{минимизировать } & \int_0^\infty e^{-\varrho\tau}\big[g(u) + {}^T y(\tau)\big]\, d\tau \\ \text{в условиях } & \frac{dy(t)}{dt} = A(t)y(t) + Bu(t) \text{ п.в.},\ y(0) = x_*, \\ & u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p,\ x(t) \in \mathbb{R}^m,\ t \geqslant 0, \\ & (T, y(T)) \in \mathcal{D} \text{ при некоторых, сколь угодно больших } T. \end{aligned}$$

Задачи такого рода также рассматривались в [8] и для так введенного асимптотического терминального ограничения множество $\mathcal{C}_{\text{home}}$ в [8, Sect. 4] совпадает с здесь введенным $\mathcal{C}$. Тогда для применимости построенного для таких задач условия трансверсальности (см. [8, Theorem 1]) достаточно проверить полунепрерывность снизу в точке x_* следующего функционала

$$x \mapsto J^{**}(x) = \limsup_{T\to\infty}[J(x, \hat{u}; T) - J(x_*, \hat{u}; T) + i_{\mathcal{C}}(x)],$$

где $i_{\mathcal{C}}(\cdot)$ равно нулю на $\mathcal{C}$ и равно $+\infty$ на его дополнении. Но $\mathcal{C}$ вводился так, что на нем $J^*(\cdot)$, а значит и $J^{**}(\cdot)$, неотрицательно; в силу определения $i_{\mathcal{C}}$, вне этого множества $J^{**}(\cdot)$ также неотрицательно. Поскольку $J^*(x_*) = 0$, то полунепрерывность $J^{**}(\cdot)$ в x_* показана и к модифицированной задаче применимо [8, Theorem 1].

Прежде чем сделать это, оценим предельный (по Мордуховичу) конус $N(x_*; \operatorname{cl}\mathcal{C})$. Для этого заметим, что $\mathcal{C}$ является верхним пределом замкнутых множеств $\mathcal{C}_T = \{x \in \mathbb{R}^m \mid J(x,\hat{u};T) \geqslant 0\}$, а следовательно по [8, Lemm 4] конус $N(x_*;\mathrm{cl}\,\mathcal{C})$ можно оценить сверху верхним пределом конусов Фреше $\hat{N}(x;\mathcal{C}_T)$ при x, T сходящихся к x_* и $+\infty$ соответственно. Далее, всякое $\mathcal{C}_T$ – множество уровня непрерывно дифференцируемой функции $x \mapsto J(x,\hat{u};T)$, а тогда ее конус Фреше $\hat{N}(x;\mathcal{C}_T)$ является конической оболочкой синглетона $\{-\frac{\partial J}{\partial x}(x,\hat{u};T)\}$ (см., например [2]). Таким образом, всякая точка из $N(x_*;\mathrm{cl}\,\mathcal{C})$ является пределом $-\lambda_n\frac{\partial J}{\partial x}(x_n,\hat{u};T_n)$ для некоторых последовательностей $\lambda_n \geqslant 0$, $T_n > 0$ и x_n, причем $x_n \to x_*$ и $T_n \to +\infty$. Наконец, поскольку, как легко видеть, $\frac{\partial J}{\partial x}(x_n,\hat{u};T_n)$ не зависит от x_n в силу линейности по $x(\cdot)$ как управляемой системы, так и функционала качества, то точки x_n можно считать равными x_*.

Согласно [8, Theorem 1] для задачи с введенным выше асимптотическом терминальным ограничением найдется ненулевая пара – число $\hat{\lambda} \in \{0,1\}$ и решение $\hat{\psi}(\cdot)$ сопряженной системы (2), – для которой управление $\hat{u}(\cdot)$ в почти каждый момент времени максимизирует (3) и выполнено следующее условие трансверсальности: $-\hat{\psi}(0)$ лежит в сумме выпуклой оболочки предельного (по Мордуховичу) конуса $N(x_*;\mathrm{cl}\,\mathcal{C})$ и выпуклой оболочки предельных точек последовательностей $\lambda_n\frac{\partial J}{\partial x}(x_n,\hat{u};T_n)$ для некоторых сходящихся к $\hat{\lambda}$, x_* и $+\infty$ последовательностей $\lambda_n > 0$, x_n и T_n. По показанной выше оценке на конус, $-\hat{\psi}(0)$ находится в выпуклой оболочке предельных точек последовательности $\lambda_n\frac{\partial J}{\partial x}(x_*,\hat{u};T_n)$ для некоторых $T_n > 0$ и λ_n, причем $T_n \to +\infty$ и $\hat{\lambda}$ не меньше верхнего предела λ_n.

Далее отметим, что, как следует из свойств решений сопряженной системы, $-\lambda_n\frac{\partial J}{\partial x}(x_n,\hat{u};T_n)$ совпадает с $\psi_n(0)$, где $\psi_n(\cdot)$ является решением сопряженной системы (2) при $\lambda = \lambda_n$ с краевым условием $\psi_n(T_n) = 0$. Тогда $\hat{\psi}(0)$ лежит в выпуклой оболочке частичных пределов $\psi_n(0)$, где $\psi_n(\cdot)$ – решения сопряженной системы (2) при $\lambda = \lambda_n$ с краевым условием $\psi_n(T_n) = 0$, причем $T_n \to +\infty$ и $\hat{\lambda}$ не меньше верхнего предела λ_n. Поскольку сопряженная система линейна, то $\hat{\psi}(\cdot)$ является частичным пределом решений $\psi_n(\cdot)$ сопряженной системы (2) при λ_n с краевым условием $\psi_n(T_n) = 0$, причем $T_n \to +\infty$ и $\hat{\lambda}$ не меньше верхнего предела λ_n. Рассматривая уравнение, соответствующее разностям $(\hat{\psi} - \psi)(\cdot)$, из $(\hat{\psi} - \psi_n)(\cdot) \to 0$ в силу ненулевого c следует, что λ_n обязано идти к $\hat{\lambda}$. Итак, $\hat{\psi}(0)$ является частичным пределом $\psi_n(0)$, где $\psi_n(\cdot)$ – решения сопряженной системы (2) при $\lambda = \lambda_n$ с краевым условием $\psi_n(T_n) = 0$, причем $T_n \to +\infty$ и $\lambda_n \to \hat{\lambda}$.

Теорема доказана.

4. Применение необходимых условий в случае 1-периодической $A(\cdot)$

Применим полученнную теорему к задаче (1) в случае 1-периодической $A(\cdot)$. Заметим, что в силу строгой выпуклости по u функции $g(\cdot)$, а значит и гамильтониана, правило (3) восстанавливает по $\hat{\psi}$ и $\hat{\lambda}$ слабо обгоняющее для задачи оптимальное управление $\hat{u}(\cdot)$ однозначно. Таким образом, каждому $\hat{u}(\cdot)$ достаточно указать лишь число $\hat{\lambda} \in \{0,1\}$ и сопряженную переменную $\hat{\psi}(\cdot)$.

Пусть $Z(\cdot)$ – фундаментальная матрица решений сопряженного уравнения $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ с $Z(0) = E$. По теореме Флоке [7] найдется такая 1-периодическая матричнозначная функция $Q(\cdot)$ и такая постоянная матрица S, что $Z(t) = Q(t)e^{St}$

Тогда $\hat{\psi}(t)$ является пределом

$$\psi_n(t) = Q(t)e^{St}\Big(\psi_n(0) + \lambda_n \int_0^t e^{-\varrho\tau}e^{-S\tau}Q^{-1}(\tau)c\,d\tau\Big)$$

с $\psi_n(T_n) = 0$ для некоторой неограниченно возрастающей последовательности T_n. Отсюда $\psi_n(0) = -\lambda_n p(T_n)$, где для всех $T > 0$

$$p(T) = \int_0^T e^{-\varrho\tau}e^{-S\tau}Q^{-1}(\tau)c\,d\tau$$

и в силу 1-периодичности Q, в силу $T = \lfloor T\rfloor + \{T\}$ имеем при $\det\left(e^{-\varrho}e^{-S} - E\right) \neq 0$

$$p(T) = e^{-\varrho(\lfloor T\rfloor+1)}e^{-S(\lfloor T\rfloor+1)}p(\{T\}) + \left[e^{-\varrho\lfloor T\rfloor}e^{-S\lfloor T\rfloor} - E\right]\left[e^{-\varrho}e^{-S} - E\right]^{-1}p(1).$$

Таким образом предельные точки у $\psi_n(T_n)$ зависят от асимптотики $e^{-\varrho k}e^{-Sk}$ при больших k и образа $p|_{[0,1]}$ (заведомо ограниченного) если эта асимптотика ненулевая.

В частности, в рамках мотивирующего примера, поскольку из-за одномерности x, отображение $T \mapsto p(T)$ обязано сохранять знак, то предельных точек у $p(T)$ не более одной и при $R > 0$ и при $R \leqslant 0$, соответственно, имеет место:

- несобственный интеграл $I = \int_0^\infty e^{-\varrho\tau}e^{-S\tau}Q^{-1}(\tau)c\,d\tau$ существует и конечен. Тогда $\hat{\lambda} = 1$, $\hat{\psi}(0) = -I$ и имеется ровно один претендент на слабо обгоняющее управление;

- $\|p(T)\|$ неограниченно возрастает, при этом $\hat{\lambda} = 0$ и единственная предельная точка для $-p(T)/\|p(T)\|$, как значение $\pm\hat{\psi}(0)$, задает с $\hat{\lambda} = 0$ двух кандидатов на оптимальность: управления $\hat{u}(\cdot) = 0$ и $\hat{u}(\cdot) = 1$.

Список литературы

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. 2007. Т. 257. С. 1–272.
2. Borwein J.M., Zhu Q.J. Techniques of variational analysis. Berlin: Springer, 2004. vi+359 p.
3. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, P. 55–69.
4. Gromov D., Bondarev A., Gromova E. On periodic solution to control problem with time-driven switching // Optim. Lett. 2022. Vol. 16, P. 2019-2031.
5. Gromov D., Shigoka T., Bondarev A. Optimality and sustainability of hybrid limit cycles in the pollution control problem with regime shifts // Environment, Development and Sustainability. 2023. P. 1-18.
6. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42, No. 2. P.267–272.
7. Hartman P. Ordinary differential equations. NY: Wiley, 1964. xv+612 p.
8. Khlopin D. Necessary Conditions in Infinite-Horizon Control Problems that Need no Asymptotic Assumptions // Set-Valued and Variational Analysis. 2023. Vol. 31, No. 1. P. 8.