Тогда $\hat{\psi}(t)$ является пределом

$$\psi_n(t) = Q(t)e^{St}\Big(\psi_n(0) + \lambda_n \int_0^t e^{-\varrho\tau}e^{-S\tau}Q^{-1}(\tau)c\,d\tau\Big)$$

с $\psi_n(T_n) = 0$ для некоторой неограниченно возрастающей последовательности T_n. Отсюда $\psi_n(0) = -\lambda_n p(T_n)$, где для всех $T > 0$

$$p(T) = \int_0^T e^{-\varrho\tau}e^{-S\tau}Q^{-1}(\tau)c\,d\tau$$

и в силу 1-периодичности Q, в силу $T = \lfloor T\rfloor + \{T\}$ имеем при $\det\left(e^{-\varrho}e^{-S} - E\right) \neq 0$

$$p(T) = e^{-\varrho(\lfloor T\rfloor+1)}e^{-S(\lfloor T\rfloor+1)}p(\{T\}) + \left[e^{-\varrho\lfloor T\rfloor}e^{-S\lfloor T\rfloor} - E\right]\left[e^{-\varrho}e^{-S} - E\right]^{-1}p(1).$$

Таким образом предельные точки у $\psi_n(T_n)$ зависят от асимптотики $e^{-\varrho k}e^{-Sk}$ при больших k и образа $p|_{[0,1]}$ (заведомо ограниченного) если эта асимптотика ненулевая.

В частности, в рамках мотивирующего примера, поскольку из-за одномерности x, отображение $T \mapsto p(T)$ обязано сохранять знак, то предельных точек у $p(T)$ не более одной и при $R > 0$ и при $R \leqslant 0$, соответственно, имеет место:

- несобственный интеграл $I = \int_0^\infty e^{-\varrho\tau}e^{-S\tau}Q^{-1}(\tau)c\,d\tau$ существует и конечен. Тогда $\hat{\lambda} = 1$, $\hat{\psi}(0) = -I$ и имеется ровно один претендент на слабо обгоняющее управление;

- $\|p(T)\|$ неограниченно возрастает, при этом $\hat{\lambda} = 0$ и единственная предельная точка для $-p(T)/\|p(T)\|$, как значение $\pm\hat{\psi}(0)$, задает с $\hat{\lambda} = 0$ двух кандидатов на оптимальность: управления $\hat{u}(\cdot) = 0$ и $\hat{u}(\cdot) = 1$.

Список литературы

1. Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН. 2007. Т. 257. С. 1–272.
2. Borwein J.M., Zhu Q.J. Techniques of variational analysis. Berlin: Springer, 2004. vi+359 p.
3. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, P. 55–69.
4. Gromov D., Bondarev A., Gromova E. On periodic solution to control problem with time-driven switching // Optim. Lett. 2022. Vol. 16, P. 2019-2031.
5. Gromov D., Shigoka T., Bondarev A. Optimality and sustainability of hybrid limit cycles in the pollution control problem with regime shifts // Environment, Development and Sustainability. 2023. P. 1-18.
6. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42, No. 2. P.267–272.
7. Hartman P. Ordinary differential equations. NY: Wiley, 1964. xv+612 p.
8. Khlopin D. Necessary Conditions in Infinite-Horizon Control Problems that Need no Asymptotic Assumptions // Set-Valued and Variational Analysis. 2023. Vol. 31, No. 1. P. 8.