УДК 338.49

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОИСКА КРИТИЧЕСКИХ УЗЛОВ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ ПОСТРОЕНИЕМ ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Крыгин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: andreyakr@yandex.ru

Б.В. Куприянов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: kuprianovb@mail.ru

Ключевые слова: транспортные сети, поиск критических узлов

Аннотация: Рассматривается задача поиска критических узлов транспортной сети, решаемая с помощью максимизации обобщенной стоимости проезда. Известны два метода ее решения: полный перебор и сведение к задаче линейного программирования. Предлагаемый в работе метод заключается в выделении замкнутого множества вершин, декомпозиции и сокращении вычислений при переборе вариантов.

1. Введение

В научной литературе существует класс задач, связанных с нахождением критических узлов в транспортных сетях. В данной работе рассматриваются автотранспортные сети. При решении таких задач автотранспортные сети моделируются в виде нагруженного графа, ребрам которого соответствуют однородные неветвящиеся участки дорог. Критические узлы ищутся среди ребер указанного вида. Задача решается с помощью оценки ущерба сети при удалении из графа сети подмножества ребер и нахождения критического подмножества, при котором ущерб достигает оптимума. Данной теме посвящено множество работ, использующих различные подходы. В статьях авторов [1, 2] в доступном электронном издании детально рассматривается данная задача и приводится библиография. Количество вариантов удаления q ребер из графа, содержащего m ребер определяется как число сочетаний C_m^q. Трудоемкой частью оценки ущерба является вычисление матрицы минимальных стоимостей путей для каждой комбинации удаляемых ребер.

В данной работе рассматривается метод выделения замкнутого множества вершин в графе и связанных с ними ребер. Выделение замкнутого множества позволяет декомпозировать и сократить вычисление матрицы путей минимальной стоимости.

2. Определения и постановка задачи

Пусть имеется неориентированный граф $G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$ с взвешенными ребрами. Ребро графа, соединяющее вершины v_i и v_j, обозначим как (i, j). Множеству вершин V соответствуют населенные пункты, перекрестки и границы смены категории дорог. Каждой паре вершин v_i и v_j ставится в соответствие два числа: $c_{i,j}$ и $d_{i,j}$. Величина $c_{i,j}$ характеризует стоимость поездки от узла v_i к узлу v_j, а $d_{i,j}$ характеризует потребность в движении, т.е. количество поездок от узла v_i к узлу v_j за единицу времени. В работе [1] приведена методика определения $c_{i,j}, d_{i,j}$. Величину $d_{i,j}$ будем считать заданной. Значение $c_{i,j}$ определяется как длина пути минимальной стоимости. Задача решается методом полного перебора следующим образом. Для каждой из C_m^q комбинаций q ребер, составляющих множество Q, вычисляется стоимость

$$S(G(V, E \backslash Q)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} d_{i,j} c_{i,j}.$$

Находится комбинация Q_0, при которой $S(G(V, E \backslash Q_0))$ достигает своего максимума.

3. Декомпозиция вычислений на основе замкнутого множества вершин

Выделим в графе подмножество вершин $S \subset V$. Определим подмножество $Z = S \cup P$, состоящее из внутреннего множества S и граничного множества P, следующим образом. Для любого ребра (i, j), где $v_i \in S \ \rightarrow \ v_j \in Z$, Z таково, что все вершины S смежны только вершинам из Z. Соответственно, $P = Z \backslash S$ и обозначим $H = V \backslash S$.

Пусть для графа G определена матрица смежностей с весами ребер W. Матрицу W можно привести к структуре показанной на рис. 1. В соответствии

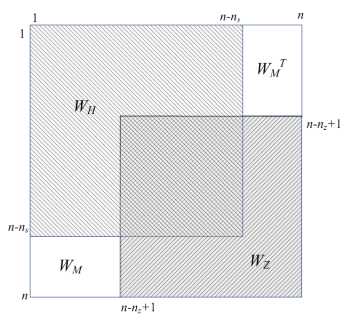

Рис. 1. Структура матрицы W

с данным разбиением будем рассматривать подматрицы матрицы W: W_H, W_M, W_Z, W_M^T. Подматрицы W_H, W_Z будут включать строки и столбцы, соответствующие граничным вершинам. Квадратная матрица W_H будет иметь размерность $n - n_s$, матрица W_M будет иметь размерность $(n - n_z, n_s)$ и квадратная матрица W_Z будет иметь размерность n_z.

Вычислим минимальные стоимости путей для всех пар вершин графа на основе матрицы W. Пусть C – матрица минимальных стоимостей путей, вычисленная на основе матрицы W. Матрице C будет соответствовать 4 «вырезанные из нее» подматрицы C_H, C_M, C_M^T, C_Z. В дальнейшем в статье будут рассматриваться граф G и соответствующие ему подмножества вершин H, Z, P, S в описанном выше смысле.

Определение 1. *Пусть граф $F = (V_F, E_F)$ является подграфом G т.е. $V_F \subset V$ и $E_F \subset E$. В этом случае назовем W_F квадратной вырезкой из матрицы W, если номера вершин V_F являются индексами строк и столбцов матрицы W.*

Т.е. $W_F = ||W_{i,j}||$, если $v_i, v_j \in V_F$. Определим функцию вырезки $Cut_F(W)$, т.е. $W_F = Cut_F(W)$.

Определение 2. *Пусть для графа G определена матрица смежностей с весами ребер. Определим функцию $\mathcal{M}s(W)$ вычисляющую матрицу минимальных стоимостей для матрицы W.*

Определение 3. *Будем называть в графе $G = (V, E)$ подмножество вершин $Z \subset V$ замкнутым, если для каждой пары вершин множества Z существует путь минимальной стоимости, такой что все его вершины принадлежат множеству Z.*

Разработан алгоритм построения замкнутого множества. Данный алгоритм находит решение не более, чем за $|V|$ итераций, однако в худшем случае множество S может совпадать с множеством V. Рассмотрим матрицу $C_Z = Cut_Z(\mathcal{M}s(W))$, т.е. вырезку внутренней области Z из матрицы C (вычисленной по матрице W).

Утверждение 1. *Пусть дан граф $G = (V, E)$ и подмножество вершин $Z \subset V$. Чтобы множество Z было замкнутым необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathcal{M}s(Cut_Z(W)) = Cut_Z(\mathcal{M}s(W)).$$

Если Z замкнутое подмножество, то $C_Z = \mathcal{M}s(Cut_Z(W))$, т.е. вычисления проводятся по матрице меньшего размера.

Утверждение 2. *Для модифицированной описанным образом матрицы W'_H выполняется равенство:*

$$\mathcal{M}s(W'_H) = Cut_H(\mathcal{M}s(W)).$$

Было показано, что если ни одно из q удаляемых ребер не принадлежит замкнутому множеству, то в этом случае матрица C для графа $G(V, E \backslash Q)$ однозначно определяется с помощью матрицы C для графа $G(V, E)$ и вычислением матрицы C_H по матрице $W'_H(V, E \backslash Q)$, размера $n - n_s$.

4. Алгоритм нахождения критических ребер

Будем считать, что вычисление матрицы путей минимальной стоимости C осуществляется с помощью алгоритма Флойда-Уоршалла.

Алгоритм 1 (Нахождение критических ребер)**.** *Исходными данными алгоритма являются матрица весов W, матрица потребности в движении D и количество удаляемых ребер q.*

1. *Выполнить алгоритм вычисления замкнутого множества вершин и вычислить первоначальную матрицу C для графа $G(V, E)$.*

2. *Выполнить в графе преобразование замкнутого множества и получить матрицу W'_H.*

3. *Для каждой из C_m^q комбинаций q ребер, составляющих множество Q, вычисляется обобщенная стоимость поездок*

$$S(G(V, E \backslash Q)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} d_{i,j} c_{i,j}.$$

   Основная часть этой операции – вычисление матрицы C для графа $G(V, E \backslash Q)$, распадается на два случая.
   3.1. Если хотя бы одно из q ребер является ребром из замкнутого множества. В этом случае матрица C вычисляется обычным способом по матрице W размера n.
   3.2. Если ни одно из q ребер не принадлежит замкнутому множеству. В этом случае матрица C для графа $G(V, E \backslash Q)$ однозначно определяется с помощью уже вычисленной матрицы C для графа $G(V, E)$ и вычислением матрицы C_H по матрице $W'_H(V, E \backslash Q)$, размера $n - n_s$.

4. *Среди всех комбинаций определяются комбинации, имеющие максимальное значение обобщенной стоимости поездок. Ребра, составляющие эти комбинации, являются критическими.*

Конец алгоритма.

Доказана справедливость этого алгоритма.

5. Оптимизация алгоритма

Отметим, что единственный параметр, на который можно влиять при реализации предложенного алгоритма, является мощность множества S – внутренних вершин замкнутого множества. Также понятно, что чем больше будет мощность множества S, тем меньшего размера будет матрица W_H и меньшее число операций потребуется для вычисления матрицы C. А с другой стороны, тем меньше будет количество комбинаций ребер, не входящих в замкнутое множество, то есть тем чаще придется вычислять матрицу C обычным способом по п. 3.1. Эти соображения позволяют предположить, что существует оптимальное значение n_s. Поиск оптимального значения осуществляется с помощью анализа сложности алгоритма вычисления замкнутого множества.

Общее количество операций сложения и умножения в рассматриваемых пунктах алгоритма нахождения критических ребер, можно оценить как $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$, где

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \frac{m(n_z - 1)}{n} + \sum_{i=2}^{n_z} M(i), \\
\Sigma_2 &= (C_m^q - C_{m-m_z}^q) M(n), \\
\Sigma_3 &= C_{m-m_z}^q (M(n - n_s) + (n - n_z) n_s n_p), \ M(l) = l^3.
\end{aligned}$$

Сложность алгоритма полного перебора $\hat{\Sigma}$ можно оценить как

$$\hat{\Sigma} = C_m^q M(n) = O(n^{4+q}).$$

Можно утверждать, что алгоритм нахождения критических ребер будет работать наиболее быстро, если замкнутое подмножество вершин удовлетворяет следующим условиям:
1. Мощность внутреннего множества примерно равна n_s^0.
2. Мощность граничного множества минимальна.

Алгоритм 2 (Нахождения замкнутого множества)**.** *Величина Σ_{min} инициализируется равной бесконечности. Множества $Z_{min} = S_{min} = P_{min} = \varnothing$.*

1. *Определяется величина n_s^0.*
2. *Для каждой вершины графа v строится замкнутое множество $Z = S \cup P$ с начальным множеством $S_0 = \{v\}$.*
3. *Вычисляются значения $\Sigma(n_s, n_p)$ и $\hat{\Sigma}(n_s, n_p)$. Если полученное Z находится в области применимости метода и $n_s \leqslant n_s^0$, то $\Sigma(n_s, n_p)$ сравнивается с Σ_{min}. Если $\Sigma(n_s, n_p) < \Sigma_{min}$, то $Z_{min} = Z$, $S_{min} = S$, $P_{min} = P$, $\Sigma_{min} = \Sigma(n_s, n_P)$.*
4. *Если $n_s > n_s^0$, то переход к следующей вершине и п. 2.*
5. *Если $n_s \leqslant n_s^0$, то область Z расширяется: строится замкнутое множество с начальным множеством $S_0 = S \cup \{u\}$, где u – произвольная вершина из граничного множества P. Переход к п. 3.*

Конец алгоритма.

Очевидно, что алгоритм работает за конечное число шагов.

6. Заключение

Из-за того, что расширение замкнутого множества происходит через произвольную граничную вершину, алгоритм не перебирает все возможные замкнутые множества, поэтому найденное множество может не быть оптимальным. Тем не менее, решение задачи предлагаемым методом с полученным замкнутым множеством происходит быстрее, чем полный перебор. Показано, что выполнение этого алгоритма не приведет к заметному увеличению сложности решения всей задачи. Несложно показать, что $\Sigma_1 = O(n_z^4)$, что гораздо меньше $\hat{\Sigma} = O(m^q n^3)$. Поэтому логично перед решением конкретной задачи нахождения критических ребер определить n_s^0, $\hat{n}_p$ и внутренне множество, так как это существенно не скажется на общем времени решения.

Список литературы

1. Крыгин А.А., Куприянов Б.В. Определение критических узлов транспортной сети. М.: УБС. 2022. № 100. С. 194–215.
2. Крыгин А.А., Куприянов Б.В. Нахождение критических узлов транспортной сети на основе построения замкнутой области. М.: УБС. 2023. № 106. С. 271–299.