УДК 519.216.3, 519.246.85, 519.71, 517.982.43

ОБЗОР ПОДХОДОВ К НЕСМЕЩЕННОЙ ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АВТОРЕГРЕССИИ

А.М. Минитаева
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр.1
E-mail: minitaeva@bmstu.ru

Ключевые слова: авторегрессия, нелинейный нестационарный процесс, автоковариционная последовательность, коррелограмма, периодограмма, последовательность Слепиана, многооконный спектральный анализ.

Аннотация: В статье приводится анализ обзора литературы зарубежных и отечественных ученых по проблеме вычисления коэффициентов авторегрессии произвольного порядка. Объектом исследования являются методы и подходы к расчету коэффициентов авторегрессии нелинейных нестационарных процессов, в т.ч. с помощью многооконного спектрального анализа. В основу работы положен принцип историчности исследований, дан современный подход к несмещенной оценке коэффициентов авторегрессии произвольного порядка. Все упомянутые в работе методы в разрезе развития подхода к вычислению коэффициентов имеют отсылки к первоисточникам, перечисленным в списке литературы.

1. Введение

Пусть $\{Y_t\}$ - стохастический процесс с нулевым математическим ожиданием, а $\{Z_t\}$ – процесс авторегрессии порядка p ($AR(p)$ процесс), т.е.

(1) $$Z_i = \alpha_1 Z_{t-1} + \alpha_2 Z_{t-2} + \ldots + \alpha_p Z_{t-p} + Y_t.$$

Модели $AR(p)$ обычно считаются стационарными процессами второго порядка [1]. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_p$ называются коэффициентами авторегрессии, вычисление которых является объектом исследования данной работы. Коэффициент α_p в модели $AR(p)$ называется коэффициентом частной автокорреляции. Уравнение (1) может вызывать аналогию между моделью $AR(p)$ и задачей регрессии, однако, вместо экзогенных переменных в правой части уравнения имеются запаздывающие значения эндогенной переменной.

Замечание 1. Можно использовать обозначение α_1^p для первого коэффициента автокорреляции в модели $AR(p)$. Так мы сможем отличить его от единственного коэффициента автокорреляции α_1^1 в процессе $AR(1)$. Будем использовать обозначение с двумя индексами, если порядок p неясен или меняется.

Коэффициент частной автокорреляции α_i^j представляет собой корреляцию между Z_t, и Z_{t-k} с линейной зависимостью промежуточных членов, Z_{t-1}, Z_{t-2},..., Z_{t-k+1} которые удалены или выделены из модели. Идея частной корреляции была введена Юлом [2]. Это была новаторская работа, поскольку, как это часто бывает и в современных работах, она опиралась на регрессию.

Альтернативное обозначение $AR(p)$, часто используемое в технике:

(2) $$Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \beta_2 Z_{t-2} + \ldots + \beta_p Z_{t-p} = Y_t,$$

где $\beta_i^p = -\alpha_i^p$.

2. Вычисление коэффициентов авторегрессии нелинейного нестационарного процесса

Нестационарный нелинейный процесс является нестабильным, и не все процессы авторегрессии являются стационарными [4]. Если все корни полиномиального уравнения $1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_1 z^{-j}=0$ (где z – комплексное число) лежат внутри единичного круга комплексной плоскости, то процесс $AR(p)$ стационарен. В данной работе основное внимание уделяется вычислению коэффициентов авторегрессии и несмещенности их оценки без проверки стабильности, которую следует выполнять перед составлением прогноза нелинейного нестационарного процесса [5].

Автоковариационная последовательность (autocovariance sequence, ACVS) с задержкой τ определяется как:

(3) $$\gamma_\tau = E\{[Z_t-\mu][Z_{t-\tau}-\mu]\},$$

где μ – математическое ожидание процесса $\{Z_t\}$, а задержка $\tau = 0,1,\dots,N-1$.

Если $\tau = 0$, то γ_0 — это дисперсия. Последовательность автокорреляции определяется следующим образом:

(4) $$\rho_\tau = \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0},$$

поэтому $\rho_0 = 1$. Для наглядности можно построить график выборочных коэффициентов автокорреляции с увеличением задержки τ, такой график называется коррелограмма.

Типичная смещенная оценка ACVS:

(5) $$\widehat{\gamma_\tau^B} = \frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-|\tau|}\left[Z_\tau-\overline{Z}\right]\left[Z_{t+|\tau|}-\overline{Z}\right].$$

Лемма 1. Если заменить $\overline{Z}$ на μ и умножить на $\frac{N}{N-|\tau|}$, то получится несмещённая оценка; однако простое выполнение второй замены при использовании оценки μ не приведет к получению несмещенной оценки [6].

Лемма 2. Последовательность, задаваемая формулой (5), положительно определена тогда и только тогда, когда эндогенные переменные Z_1, Z_2,..., Z_N не полностью идентичны.

Замечание 2. Обычно вместо прямого вычисления ACVS в уравнении (5) используются быстрые преобразования Фурье (БПФ).

Мы будем исследовать и оценивать функцию спектральной плотности (или спектральную плотность мощности, СПМ), которая представляет собой преобразование Фурье ACVS,

(6) $$S(f) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\gamma_\tau e^{-i2\pi f\tau}.$$

В уравнении (6) допустим $\tau \in \mathbb{Z}$, мы рассматриваем процесс с бесконечным прошлым и будущим. Частота $f \in [0, 1/2]$. Приведенное выше равенство (6) верно только в среднеквадратическом смысле, но его можно рассматривать поточечно во всех практических приложениях.

Замечание 3. Последовательность функций $\{g_n\}$ сходится поточечно к функции g тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$. На практике ACVS и спектр используются как пары преобразований Фурье. Тот факт, что автоковариации и функция спектральной плотности (или спектральная плотность мощности, СПМ) представляют собой пару преобразований Фурье, был впервые обнаружен в 1914 году [7], но не был учтен [8]. Он был независимо переоткрыт Винером и Хинчиным в 1930-е годы [9-10].

3. Многооконный спектральный анализ

Функция спектральной плотности описывает, как мощность сигнала распределена в зависимости от его частоты. Она показывает, сколько мощности приходится на каждый единичный интервал частоты. Спектральная плотность мощности измеряется в единицах мощности, деленных на частоту, что соответствует единицам энергии. При этом спектральная плотность энергии (СПЭ) описывает энергию сигнала на единицу ширины полосы пропускания и измеряется в Дж/Гц. А так как величина единичного интервала частоты обратно пропорционально шагу дискретизации, то имеем, что СПМ = СПЭ / шаг дискретизации.

Спектральная плотность мощности для стационарного процесса $AR(p)$ равна

(7) $$S_{AR}(f) = \frac{\sigma_Z^2}{\left|1-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j e^{-i2\pi fj}\right|^2}, \text{ для } |f| \leq 1/2,$$

когда $\Delta t = 1$. Обычно уравнение (7) рассчитывается с использованием БПФ.

Прямая спектральная оценка СПМ:

(8) $$\widehat{S}_D(f) = \Delta t\left|\sum_{t=1}^{N} h_t x_t e^{-i2\pi ft\Delta t}\right|^2,$$

где Δt — это изменение шага по времени t, h_t – оконная функция для сглаживания данных.

Положим $h_t = \sqrt{1/N}$, тогда прямая спектральная оценка становится так называемой периодограммой, которую обозначим как $\hat{S}(f)$. Необработанная периодограмма асимптотически не смещена, но в практических приложениях смещение может существовать даже при больших размерах выборки [11]. Кроме того, периодограмма является непоследовательной статистической оценкой, то есть дисперсия не уменьшается с увеличением размера выборки [12]. Можно показать, что для реальных данных эта оценка имеет распределение χ_2^2, когда $h_t = \sqrt{1/N}$ для всех частот, кроме $f = 0$ и $f = 1/2$, которые содержат только действительные значения и, следовательно, имеют распределение χ_1^2 [13].

Таким образом, периодограмма и смещенная оценка ACVS по уравнение (5) представляют собой пары преобразований Фурье $\{\hat{\gamma}_\tau^B\} \leftrightarrow \{\hat{S}(f)\}$.

Используем набор ортонормированных дискретных вытянутых сфероидальных последовательностей (discrete prolate spheroidal sequence, DPSS), также известных как последовательности Слепиана, в качестве оконных функций. Эти последовательности определяются как решения системы уравнений:

(9) $$\sum_{t'=0}^{N-1}\frac{\sin[2\pi W(t-t')]}{\pi(t-t')}v_{t',k}(N,W) = \lambda_k(N,W)v_{t,k}(N,W), \text{ для } t,t' = 0,1,\ldots,N-1.$$

Эти последовательности являются аналогами реальных функций в дискретном времени, которые оптимально сконцентрированы по времени и частоте [14]. Параметр W представляет собой эффективную полосу пропускания, которая часто включается в параметр ширины полосы пропускания NW, а k представляет собой текущее окно. Обычно существует $k = 0,1,\ldots K-1$ окон, где $K = 2NW$. Мы используем набор ортонормированных последовательностей Слепиана при построении многооконной спектральной оценки. Если $\hat{S}_k(f)$ будет представлять прямую спектральную оценку в уравнении (8), сформированную с использованием последовательности Слепиана порядка k, то простейшая форма многооконной спектральной оценки будет выглядеть так:

(10) $$\hat{S}^{(MT)} \equiv \frac{1}{k}\sum_{k=0}^{K-1}\hat{S}_k(f).$$

Отдельные оценки $\hat{S}_k(f)$ являются собственными спектрами, а усредненная оценка по уравнению (10) имеет распределение χ_{2K}^2 для $f \neq 0$ и $f \neq 1/2$.

При использовании последовательностей Слепиана выбирается параметр пропускной способности времени NW, который, в свою очередь, определяет W. Обычно параметр полосы пропускания задается в диапазоне от 2 до 6, при этом можно использовать нецелые значения [11]. Разумный выбор параметра полосы пропускания может позволить, например, разрешить гармонику меньшей мощности, которая в противном случае была бы замаскирована соседней гармоникой более высокой мощности.

4. Заключение

На практике используется адаптивная взвешенная многооконная спектральная оценка $\hat{S}^{(AMT)}(f)$, которая использует сложную схему взвешенного усреднения. Эта схема взвешивания обычно снижает вес собственных спектров более высокого порядка, которые имеют более высокое смещение [11]. Эта схема взвешенного усреднения обеспечивает нецелочисленную оценку степени свободы на каждой частоте, которая обычно немного ниже $2K$, но также может быть значительно ниже.

Авторегрессию высоких порядков, в частности $AR(10)$, автор использует в своем многомодельном подходе к прогнозированию нелинейных нестационарных процессов в задачах оптимального управления, о котором докладывал в 2022-2023 годах на международной и всероссийской конференциях [15, 16].

Список литературы

1. Chatfield C. The Analysis of Time Series: An Introduction. Boca Raton: CRC Press, Chapman and Hall, 2004. P. 43-44.
2. Yul G.U. On The Theory of Correlation // Journal of the Royal Statistical Society. 1897. Vol. 60, No. 4. P. 812-854.
3. Priestley M.B. Spectral Analysis and Time Series. New York: Academic Press, 1981.
4. Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C. Time Series Analysis; Forecasting and Control / 3rd Edition, Englewood Cliff, New Jersey: Prentice Hall, 1994. P. 10.
5. Chatfield C. The Analysis of Time Series: An Introduction. Boca Raton: Chapman and Hall, CRC Press, 2004, P. 262-264.
6. Carey S., Bartlett E. Acquiring a Single New Word // Proceedings of the Stanford Child Language Conference. 1978. Vol. 15. P. 17-29.
7. Einstein A., Fokker, A.D. Annalen der Physik // 1914. Vol. 44. P. 321-328. https://doi.org/10.1002/andp.19143491009
8. Yaglom A.M. Correlation Theory of Processes with Random Stationary nth Increments // AMS Translation. 1958. Vol. 2, No. 8. P. 87-141.
9. Paley R., Wiener N. Fourier Transforms in the Complex Domain. American Mathematical Society, Providence, 1934.
10. Хинчин А.Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов // Успехи математических наук, 1938. № 5. С. 42-51.
11. Thomson D.J. Spectrum Estimation and Harmonic Analysis // Proceedings of the IEEE. 1982. Vol. 70. P. 1055-1096. https://doi.org/10.1109/PROC.1982.12433.
12. Schuster F.R.S. On the spectrum of an irregular disturbance // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Series 6. 1903. Vol. 5, No. 27. P. 344-346.
13. Blackman R.B., Tukey J.W. The Measurements of Power Spectra. New York: Dover, 1958.
14. Slepian D. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty—V: The Discrete Case // Bell System Technical Journal. 1978. Vol. 57. P. 1371-1430. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1978.tb02104.x
15. Минитаева А.М. Многомодельный подход к прогнозированию нелинейных нестационарных процессов в задачах оптимального управления // Необратимые процессы в природе и технике: труды

12 Всероссийской конференции. Москва, 31 января – 3 февраля 2023 г. : в 2 т. / РАН, МГТУ им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский ун-т), Физический ин-т им. П. Н. Лебедева РАН. 978-5-7038-6011-3. 2023. Т. 1. С. 438-447.

16. Минитаева, А. М. Многомодельный подход к прогнозированию нелинейных нестационарных процессов в задачах оптимального управления // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж, 12-14 декабря 2022 г. Воронежский государственный университет. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2023. С. 1564-1571. EDN BABZFS.