УДК 681.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРООБРАЗОВ ГРАНИЦ ОТРЕЗКОВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОЛЮСОВ СИСТЕМЫ С АФФИННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

С.А. Гайворонский
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 30
E-mail: saga@tpu.ru

И.В. Хожаев
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 30
E-mail: ivh@tpu.ru

Ключевые слова: характеристический полином, интервальные параметры, отрезки вещественных полюсов, параметрический многогранник, корневой годограф.

Аннотация: Рассматривается характеристический полином системы, в коэффициенты которого линейно входят интервальные параметры объекта управления. Решается задача определения вершин многогранника интервальных параметров, отображающихся на границы отрезков вещественных полюсов системы. Решение основано на интервальном расширении основного уравнения фаз корневого годографа для определения углов выхода полюсов из границ отрезков по каждому интервальному параметру. Сформулировано утверждение для нахождения граничных вершин и два следствия.

1. Введение

Модификация классической теории корневого годографа может представлять определенный интерес для решения современных проблем автоматического управления [1]. Это касается, например, управления объектами с несколькими интервально-неопределенными параметрами, образующими параметрический многогранник. Для исследования подобных систем на основе теории корневого годографа следует отобразить многогранник параметров на корневую плоскость и тем самым получить многопараметрический интервальный корневой годограф (МИКГ). Он будет состоять из отрезков полюсов на вещественной оси и ограниченных реберными ветвями областей локализации комплексно-сопряженных полюсов. Установлено, что часто для анализа и синтеза интервальных систем нет необходимости строить МИКГ, а достаточно знать важные (критические) вершины многогранника, определяющие корневые показатели робастного качества системы [2-4]. В частности, для параметрического синтеза робастных регуляторов апериодической степени устойчивости системы следует знать прообразы границ задаваемых отрезков доминирующих вещественных полюсов.

2. Постановка задачи

Координаты вершин, отображающиеся на границы отрезков вещественных полюсов систем с интервальной неопределенностью коэффициентов характеристических полиномов, определены ранее в работах [5-7], посвященных синтезу робастных систем с апериодическими переходными процессами. Однако предложенный там подход допускает независимое изменение коэффициентов полинома внутри многогранника, что приводит к консерватизму получаемых результатов. Для его уменьшения следует перейти от интервального типа неопределенности коэффициентов характеристического полинома к ее аффинному типу. Такая возможность существует, если физические интервальные параметры объекта управления линейно входят в коэффициенты полинома. В этом случае вместо многогранника интервальных коэффициентов рассматривается многогранник интервальных параметров объекта управления. В статье ставится задача поиска среди вершин такого многогранника прообразов границ отрезков вещественных полюсов системы.

3. Определение реберной передаточной функции системы

Запишем характеристический полином системы в следующем виде

(1) $$D(s) = \sum_{i=1}^{m} [T_i] \cdot A_i(s) + B(s),$$

где $\underline{T_i} \leq T_i \leq \overline{T_i}$, $\underline{T_i} = T_{i_{\min}}$, $\overline{T_i} = T_{i_{\max}}$. Пусть $A_i(s)$– полиномы по степеням s, что соответствует аффинной неопределенности полинома (1).

Так как m интервальных параметров заданы своими граничными значениями, то параметрический многогранник, внутри которого T_i могут изменяться произвольным образом, представляет собой прямоугольный гиперпараллелепипед $P_T = \left\{T_i \middle| \underline{T_i} \leq T_i \leq \overline{T_i}, i = \overline{1,m}\right\}$, содержащий 2^m вершин.

Координаты любой точки P_T относительно вершины V_q, $q = \overline{1;2^m}$ определяются выражениями

(2) $$T_i = T_i^q + \Delta T_i, i = \overline{1,m},$$

где ΔT_i – приращение i –го интервального параметра, T_i^q– его значение в вершине V_q.

Подставив (2) в (1), получим

(3) $$D^q(s) + \Delta T_1 \cdot A_1(s) + \Delta T_2 \cdot A_2(s) + \ldots . + \Delta T_m \cdot A_m(s) = 0,$$

где $D^q(s) = \sum_{i=1}^{m} T_i^q \cdot A_i(s) + B(s)$ – вершинный полином. Основываясь на (3), запишем уравнение отображения ребра P_T из вершины V^q по параметру T_i

(4) $$D^q(s) + \Delta T_i \cdot A_i(s) = 0,$$

На основании (4), следуя теории корневого годографа [8], сформируем реберную передаточную функцию для построения реберной ветви по параметру T_i

(5) $$W_i^q(\Delta T_i, s) = \frac{\Delta T_i \cdot A_i(s)}{D^q(s)}.$$

Очевидно, что корни уравнения $A_i(s) = 0$ являются нулями передаточной функции (5) а корни уравнения $D^q(s) = 0$ ее полюсами.

4. Свойства отрезков вещественных полюсов системы

Из теории корневого годографа [8] известно свойство его ветвей находиться в определенных частях действительной оси, зависящих от числа действительных нулей и полюсов системы. Интервальное расширение этого свойства предусматривает определение у многогранника интервальных параметров системы вершин, отображающихся на границы отрезков вещественных полюсов. Для этого доказано следующее утверждение.

Утверждение. *Если корень s_j уравнения $D^q(s) = 0$ является правой границей отрезка $\left[s_j^L; s_j^R\right]$ его локализации на вещественной оси при изменении параметра T_i и общее число расположенных на этой оси правее s_j^R отрезков других корней и постоянных корней уравнения $A_i(s) = 0$ четное, то в координатах вершины-прообраза s_j^R следует принять$T_i^q = \underline{T_i}$. Если общее число правых отрезков и корней нечетное, то $T_i^q = \overline{T_i}$. Координаты вершины-прообраза s_j^L имеют противоположные пределы интервальных параметров.*

Доказательство. Доказательство основано на уравнениях углов выхода ветвей корневых годографов из действительных полюсов, полученных из основного уравнения фаз, а также свойстве ветвей корневых годографов находиться в тех частях действительной оси, справа от которых расположено нечетное общее число действительных нулей и полюсов разомкнутой системы [8]. Заметим, что в указанных уравнениях угол выхода из правой границы отрезка вещественного полюса должен быть $180°$, а из левой – $0°$. На эти углы не влияют слагаемые уравнения фаз от комплексно-сопряженных полюсов, так как их сумма равна 0° или $360°$.

Следствие 1. *Если между двумя отрезками вещественных корней характеристического полинома с аффинной неопределенностью нет корней уравнений $A_i(s) = 0$, то одинаковым концам этих отрезков соответствуют вершины с противоположными пределами интервальных параметров.*

Для синтеза робастного регулятора, обеспечивающего робастную степень апериодической устойчивости системы вещественным корнем s_1 полезно следующее следствие доказанного выше утверждения

Следствие 2. *Прообразом вещественного корня s_1, определяющего робастную степень апериодической устойчивости системы с аффинной неопределенностью является вершина V^q многогранника интервальных параметров, в которой $T_i^q = \underline{T_i}$ в случае четного числа вещественных корней уравнения $A_i(s) = 0$, расположенных правее s_1. Если число корней уравнения $A_i(s) = 0$ нечетное, то $T_i^q = \overline{T_i}$.*

5. Пример

С помощью числового примера проверим приведенное в статье утверждение относительно координат вершин многогранника параметров, образами которых являются границы отрезков вещественных полюсов системы. Пусть задан ее характеристический полином с аффинным типом неопределенности, определяемым тремя интервальными параметрами, линейно входящими в коэффициенты полинома

(6) $$[T_1] \cdot s^4 + (6 \cdot [T_1] + [T_2]) \cdot s^3 + (11 \cdot [T_1] + 5 \cdot [T_2]) \cdot s^2 + \\ +(6 \cdot [T_1] + 6 \cdot [T_2] + [T_3]) \cdot s + 3 \cdot [T_3] + 1.$$

Преобразуем полином (6) к виду (1)

(7) $$[T_1] \cdot A_1(s) + [T_2] \cdot A_2(s) + [T_3] \cdot A_3(s) + 1,$$

где $A_1(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s$; $A_2(s) = s^3 + 5s^2 + 6s$; $A_3(s) = s + 3$;$[T_1] = [5; 10]$; $[T_2] = [30; 70]$; $[T_3] = [10; 20]$.

Многопараметрический интервальный корневой годограф для такого полинома четвертой степени представляет собой четыре отрезка на отрицательной вещественной полуоси:

$s_1 = [-0.38; -0.07]$; $s_2 = [-1.92; -1.44]$; $s_3 = [-3.03; -3.01]$; $s_1 = [-15; -4.1]$.

Эти отрезки с параметрическими координатами их границ показаны на рис 1. Там же изображены вещественные корни полиномов $A_i(s)$из (7):

$$A_1(s) = 0 \text{ при } s_1 = 0;\ s_2 = -1;\ s_3 = -2;\ s_4 = -3,$$
$$A_2(s) = 0 \text{ при } s_1 = 0;\ s_2 = -2;\ s_3 = -3,$$
$$A_3(s) = 0 \text{ при } s_1 = -3.$$

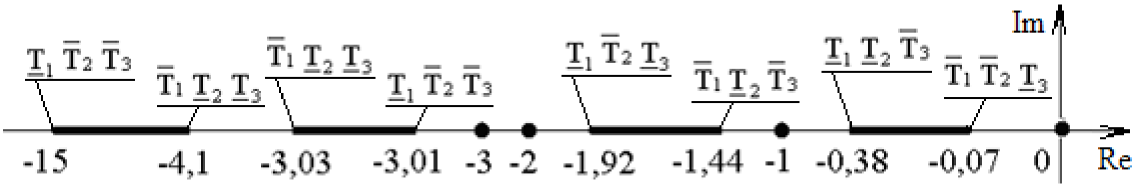

Рис. 1. Области локализации полюсов синтезированной системы.

На основании взаимного расположения отрезков и указанных выше корней согласно утверждению получены координаты вершин, отображающихся на границы отрезков

$$s_1^L \to (\underline{T}_1\underline{T}_2\overline{T}_3);\ s_1^R \to (\overline{T}_1\overline{T}_2\underline{T}_3),\ s_2^L \to (\underline{T}_1\overline{T}_2\underline{T}_3);\ s_2^R \to (\overline{T}_1\underline{T}_2\overline{T}_3),$$
$$s_3^L \to (\overline{T}_1\underline{T}_2\underline{T}_3);\ s_3^R \to (\underline{T}_1\overline{T}_2\overline{T}_3),\ s_4^L \to (\underline{T}_1\overline{T}_2\overline{T}_3);\ s_4^R \to (\overline{T}_1\underline{T}_2\underline{T}_3).$$

Эти вершины совпадают с теми, которые были получены при построении отрезков вещественных полюсов и указаны на рис. 1.

6. Заключение

При модальном синтезе робастного регулятора системы автоматического управления с интервальными параметрами часто необходимо сохранять апериодические переходные процессы, для чего следует гарантировать локализацию доминирующего вещественного полюса в заданном отрезке. Другая возможная задача, связанная с локализацией вещественных полюсов, может состоять в получении в системах управления переходных процессов с нулевым перерегулированием (монотонных переходных процессов), когда все полюса лежат в своих заданных отрезках. Указанные задачи могут быть решены на основе сформулированных выше утверждения и его следствий.

Результаты работы могут быть применены и для системы с интервальной неопределенностью, когда коэффициенты характеристического полинома заданы своими интервалами. В этом случае все нули реберной передаточной функции будут находиться в начале координат, так как полиномы$A_i(s)$ заменяются на s^i.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00737, https://rscf.ru/project/23-29-00737.

Список литературы

1. Корневые методы исследования интервальных систем / Под ред. Г.В. Римского. Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999. 186 с.
2. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3-23.
3. Гайворонский С.А., Езангина Т.А., Хожаев И.В. Определение вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальной системы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 5. С. 266-273.
4. Гайворонский С.А., Езангина Т.А. Определение вершин многогранника коэффициентов характеристического полинома системы для анализа степени робастной колебательности // Сборник

трудов XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. Москва, 17 июня - 20 июня 2019 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. С. 697-702.

5. Gayvoronskiy S.A., Khozhaev I., Pushkarev M., Ezangina T. Parametrical synthesis of linear controllers in aperiodical systems on basis of decomposition approach // International Review of Automatic Control. 2019. Vol. 12, No. 4. P. 192-199.
6. Ezangina T., Gayvoronskiy S.A., Khozhaev I. Providing an aperiodicity of transient process in a interval control system on a base of pole domination principle // ACM International Conference Proceeding Series. Beijing, China, 2018. P. 122-126.
7. Гайворонский С.А., Суходоев М.С. Определение настроек линейных робастных регуляторов, обеспечивающих апериодические переходные процессы в интервальных системах // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 316, № 5. С. 12-15.
8. Удерман Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. М.: Наука, 1972. 448 с.