УДК 519.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРКОЛЯЦИИ РЕСУРСНЫМИ СЕТЯМИ

Л.Ю. Жилякова
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: zhilyakova@ipu.ru

В.Р. Корешков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: koreshkovhw@yandex.ru

Ключевые слова: графовые динамические модели, сетевые модели, ресурсная сеть, ресурсная сеть с жадными вершинами, перколяция.

Аннотация: В работе предложен подход к моделированию процесса перколяции с помощью ресурсной сети с жадными вершинами. Сеть задается графом с регулярной структурой. Это могут быть треугольные, прямоугольные или гексагональные решетки, ориентированные в пространстве, то есть, имеющие верх и низ. Протекание ресурса сверху вниз происходит за счет анизотропии пропускных способностей. Все связи между вершинами двусторонние, однако, пропускные способности дуг, ведущих вниз, больше, чем у дуг, ведущих вверх. «Жадность вершин» заключается в том, что сначала ресурс передается в петлю (и остается в ней), а затем излишки распределяются между смежными вершинами. Это свойство имитирует намокание пористой среды, которая удерживает часть жидкости в себе. Описан программный комплекс, реализующий эту модель.

1. Введение

Моделирование перколяции или просачивания жидкости через пористые материалы имеет достаточно долгую и плодотворную историю. Основные модели перколяции на графах, а также алгоритмы и приложения изложены в книгах [1, 2]. Тем не менее, исследования процессов перколяции на графах продолжаются, предлагаются всё новые модели, такие как перколяция на случайных регулярных графах [3, 4], перколяция в сложных сетях [5, 6], перколяция в смешанных случайных [7] и псевдослучайных [8] графах, а также многие другие.

В настоящей работе предложена модель перколяции, основанная ресурсной сети с жадными вершинами, заданной графом с регулярной структурой. Модель *ресурсная сеть* впервые предложена О.П. Кузнецовым в 2009 г. [9]. С тех пор была создана теория ресурсных сетей предложены и исследованы различные модификации стандартной модели. Среди них модель с жадными вершинами [10, 11], в которой изменены правила распределения ресурса. На каждом такте дискретного времени, в котором функционирует сеть, «жадная вершина» забирает ресурс в петлю и лишь затем распределяет оставшийся ресурс в остальные выходные дуги. Ресурс в петле остается там навсегда. Это свойство позволяет моделировать намокание среды и заполнение пор жидкостью. Таким образом, при ограниченном количестве ресурса, возникает задача о вычислении его минимального достаточного количества для протекания через весь граф сверху вниз. Ресурсная сеть, имитирующая перколяцию, была названа *губковой* *ресурсной сетью*. Губковая сеть – в некотором роде, продолжение модели распространения загрязнения в водной среде, описанной в [12]. В ней распространения загрязнения моделировалось растеканием ресурса в сети, заданной прямоугольной решеткой, в которой пропускные способности соответствовали силе течений и скорости ветра. Губковая сеть, помимо иной интерпретации, отличается большей гибкостью: она включает большее разнообразие топологий, имеет жадные вершины, а также является открытой – ресурс может втекать сверху и вытекать снизу.

2. Модель губковой ресурсной сети

Ресурсная сеть — ориентированный граф, с которым ассоциирована динамическая система с дискретным временем. $G = (V, E)$ – граф сети, дуги E размечены над множеством $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел, $|V| = n$, вершины v графа G имеют фиксированные номера. Ресурс хранится в вершинах и перераспределяется в дискретном времени в соответствии с заданными правилами (формула (1)). Состояние системы в момент времени t может быть описано, таким образом, с помощью вектора-строки $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$.

$R = \left(r_{ij}\right)_{n\times n}$ – *матрица пропускной способности* ($r_{ij} \in R_+$). Если ребро e_{ij} существует, то оно обладает некоторой пропускной способностью $r_{ij} > 0$, иначе $r_{ij} = 0$. С ресурсной сетью можно связать также *стохастическую матрицу* R':

$$R' = \left(\frac{r_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} r_{ik}}\right)_{ij}.$$

Стохастическая матрица – матрица соответствующей данной сети цепи Маркова.

Для понимания того, сколько ресурса перетечет из одной вершины в другую нам потребуется понятие *матрицы потока* $F(q)$:

$$F(q) = \min\{R' \odot (\mathbf{1}\cdot q), R\},$$

где min применяется поэлементно, $\odot$ – произведение Адамара, $\mathbf{1}$ – вектор-столбец из единиц. Можно видеть, что пока в вершине мало ресурса, то сеть работает как цепь Маркова, а когда много – как потоковая модель.

Количество ресурса в каждой вершине в следующий момент времени определяется как:

$$q(t+1) = q(t) - \left(F\big(q(t)\big)\cdot \mathbf{1}\right)^{\mathrm{T}} + \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \cdot F\big(q(t)\big). \quad (1)$$

Таким образом, изменение количества ресурса в вершине в следующий момент времени определяется разностью того, сколько ресурса пришло из соседних вершин и сколько утекло.

Ресурсная сеть с жадными вершинами – модификация обыкновенной ресурсной сети, при которой каждая вершина с петлей сначала отправляет ресурс в свою петлю, а только потом отдает его в соседние вершины. Таким образом, поток модифицируется следующим образом:

$$\begin{cases} q' = \max\{0, q - \Delta R\}, \\ f(q) = \min\{R' \odot (\mathbf{1}\cdot q'), R\} + q', \end{cases}$$

где Δ – оператор взятия диагонали.

Пример губковой сети приведен на рис. 1.

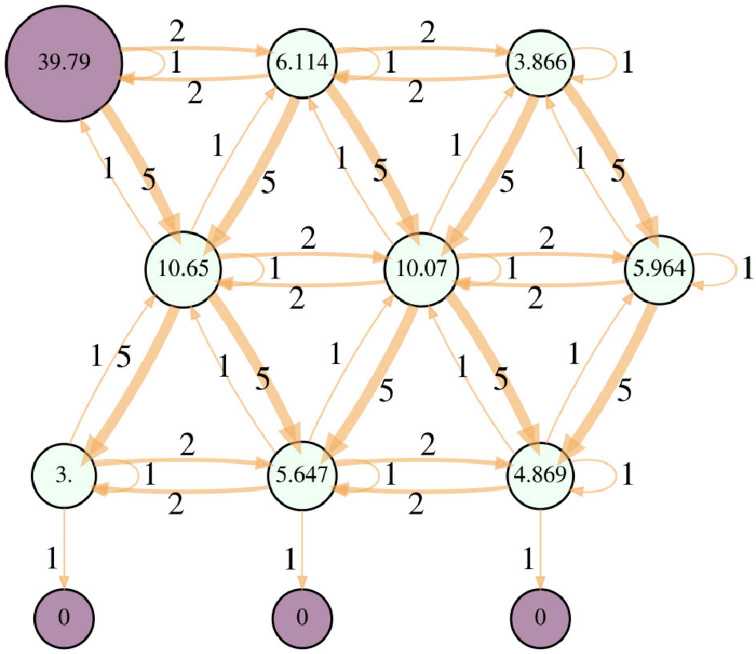

Рис. 1. Пример губковой сети с треугольной сеткой. Числами в вершинах показано количество ресурса; числа на ребрах — веса ребер (пропускные способности). Если количество ресурса в вершине меньше суммарной выходной пропускной способности вершины, то она окрашена в зеленый цвет, а если не меньше, то в сиреневый.

Таким образом, губковые сети имеют следующие особенности:

- вместо обыкновенной сети используется ресурсная сеть с «жадными» вершинами; это позволяет моделировать задержку жидкости в губке;
- граф сети может быть условно вложен не в горизонтальную плоскость, как в случае распространения вещества в воде, а в вертикальную: вода как бы стекает по сети сверху вниз под действием гравитации;
- сама сеть может быть не только прямоугольной, но и треугольной, шестиугольной и, теоретически, произвольным планарным графом;
- ресурс распространяется сверху вниз под действием гравитации, однако, в модели учитывается и капиллярный эффект, имитирующий незначительное обратное движение жидкости снизу-вверх;
- ресурс либо все так же остается внутри губки, либо стекает вниз, при этом сохраняется информация о том, сколько ресурса утекло с каждой нижней вершины (ресурс сохраняется в дополнительных вершинах-стоках).

3. Реализация

Для исследования свойств губковых сетей, было реализовано соответствующее программное окружение на языке Python. Приложение было названо «sponge-netowrks», оно имеет открытый исходный код, опубликованный на Github [13]. Лицензия проекта – MIT.

Основная задача проекта – предоставить пользователю доступ к надежному, удобному и свободно расширяемому интерфейсу для проведения различных исследований в области ресурсных сетей. Проект интегрирован со средой jupyter notebook, что позволяет получать результаты симуляций и прочих операций над ресурсными сетями в удобно читаемом и интерактивном виде. Sponge-networks позволяет:

- создавать ресурсные сети на основе матриц, графов и списков смежности;
- модифицировать произвольным образом ресурсные сети, не нарушая внутренней целостности данных;
- проводить симуляции, задавая количество шагов, которые должна отработать система, и начальные условия. Результат симуляции хранит в себе всю необходимую информацию о состояниях и потоках сети за время симуляции;
- искать предельные состояния ресурсной цепи, а также положения равновесия эргодической ресурсной сети как цепи Маркова;
- представлять симуляции в виде массивов, листов Excel и графиков;
- рисовать ресурсные сети;
- рисовать симуляции в виде ресурсных сетей с анимациями, реализованными с помощью слайдера, который позволяет визуализировать на граф ресурсной сети в произвольный момент времени (рис. 2, 3);
- экспортировать анимации в gif;
- создавать губковые сети на основе обычных ресурсных сетей и проводить их симуляции;
- создавать губковые сети по шаблону, указывая тип и параметры сетки, а также веса ребер по направлению. Присутствует возможность указать, создавать ли в сети стоки.

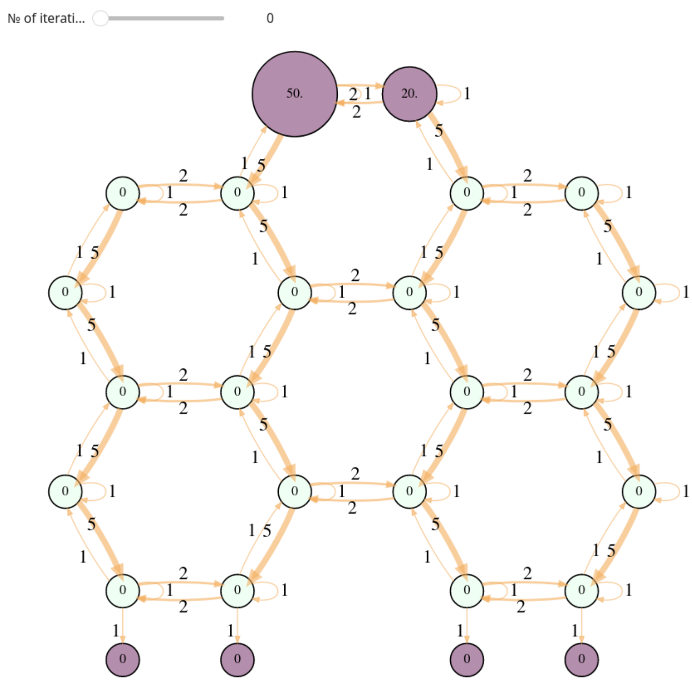

Рис. 2. Пример графа симуляции шестиугольной губковой сети S в момент времени $t = 0$

Подробная документация по установке и использованию вместе с показательными примерами содержится в файле ./jupyter/doc.ipynb в папке проекта [13].

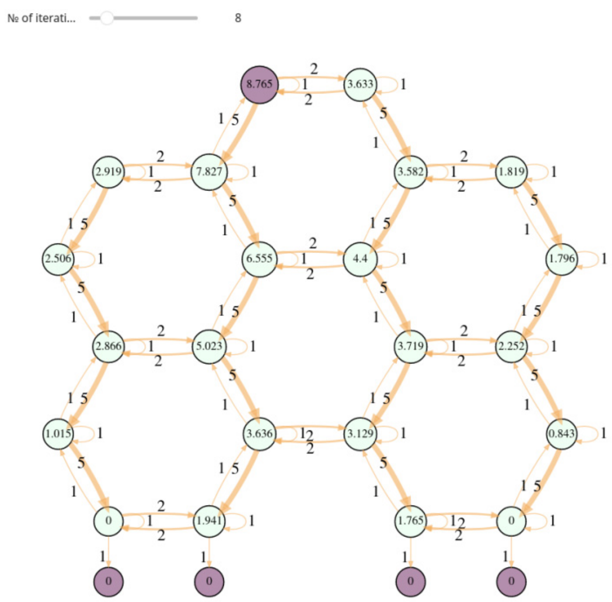

Рис. 3. Пример графа симуляции шестиугольной губковой сети S в момент времени $t = 8$

4. Заключение

В работе описаны модель губковой ресурсной сети, которая позволяет моделировать процесс перколяции. Мы видим два будущих направления исследований модели. Первое касается создания больших сетей и изучения их статистических характеристик: среднее время и среднюю скорость протекания, влияние асимметрии в структурах сетей и в начальном распределении ресурса на его протекание (см. рис. 1), образование больших кластеров и т.д. Второй направление – изучение малых сетей, выдвижение и проверка гипотез относительно распределения ресурса в нижних слоях и получение теоретических результатов.

Список литературы

1. Bollobás B, Riordan O. Percolation. Cambridge: Cambridge University Press; 2006. 323 p.
2. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: Учебное пособие. М.: Едиториал УРСС, 2002. 112 с.
3. Nachmias, A., Peres, Y. Critical percolation on random regular graphs // Random Structures & Algorithms. 2010. Vol. 36, No. 2. P. 111-148.
4. Joos F., Perarnau G. Critical percolation on random regular graphs // Proceedings of the American Mathematical Society. 2018. Vol. 146, No. 8. P. 3321-3332.
5. Cohen R., Havlin S. Percolation in complex networks // Complex Media and Percolation Theory. 2021. P. 419-431.
6. Li M. et al. Percolation on complex networks: Theory and application // Physics Reports. 2021. Vol. 907. P. 1-68.
7. Verbavatz, V., Barthelemy, M. From one-way streets to percolation on random mixed graphs // Physical Review E. 2021. Vol. 103, No. 4. P. 042313.
8. Diskin S., Krivelevich M. Site percolation on pseudo random graphs // Random Structures & Algorithms. 2023. Vol. 63, No. 2. P. 406-441.
9. Кузнецов О. П. Однородные ресурсные сети I. Полные графы //Автоматика и телемеханика. 2009. №. 11. С. 136-147.
10. Zhilyakova L. Single-Threshold Model Resource Network and Its Double-Threshold Modifications // Mathematics. 2021. Vol. 9, No. 12. P. 1444.
11. Чаплинская Н.В. Исследование эргодических неоднородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами // УБС. 2021. Т. 93. С. 5-50.
12. Жилякова Л.Ю. Применение ресурсных сетей для моделирования распространения веществ в водной среде // Проблемы управления. 2011. № 2. С. 46-51.
13. URL: https://github.com/heinwol/sponge-networks/. Дата обращения 26.12.2023.