

УДК 681.5

# ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ РОБАСТНОГО ПИД-РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ АПЕРИОДИЧЕСКОГО ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ

**Т.А. Езангина**

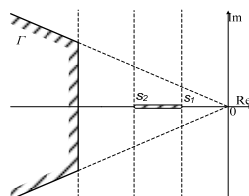
*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*  
Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 30  
E-mail: saga@tpu.ru

**Ключевые слова:** интервальная система управления, модальный синтез регулятора, максимальная степень доминирования.

**Аннотация:** В статье рассмотрена проблема определения настроек линейного регулятора, обеспечивающего в системе с интервальными параметрами апериодические переходные процессы. Для ее решения предложен декомпозиционный подход на основе разделения характеристического полинома системы на доминирующий, задающий доминирующий вещественный полюс, и свободный, определяющий расположение остальных полюсов. Для размещения свободных полюсов на максимальном удалении от доминирующего сформулированы условия максимальной степени доминирования. Разработана методика модального синтеза линейных регуляторов. Применение методики рассмотрено на числовом примере.

## 1. Введение

Существует большой класс систем управления, в которых переходные процессы должны быть апериодическими или близкими к ним. При наличии в объекте управления интервальных параметров каждый полюс системы будет мигрировать по комплексной плоскости, образуя область своей локализации. Очевидно, что доминирующий вещественный корень, обеспечивающий апериодический переходный процесс, тоже будет мигрировать, но в отрезке  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , расположенном на действительной оси (рис. 1). Для сохранения апериодического вида переходных процессов необходимо, чтобы этот отрезок оставался доминирующим при любых значениях интервальных параметров, а все остальные корни располагались в области  $\Gamma$  на определенном расстоянии от отрезка  $[\alpha_1, \alpha_2]$ . Решение данной задачи приведены в работах [1]-[5].



**Рис. 1.** Области локализации доминирующего и свободных корней.

## 2. Постановка задачи

Пусть задан ИХП вида

$$(1) \quad A(s, k_r) = \sum_{i=0}^n a_i(k_r) s^i, \quad r = \overline{0, m}, \quad m \geq 3,$$

$a_{i\min}(k_r) \leq a_i(k_r) \leq a_{i\max}(k_r)$  – интервальные коэффициенты, образующие многогранник с  $2^{n+1}$  вершинами  $V$ ,  $k_r$  – настройки регулятора, которые линейно входят ИХП. Необходимо выбрать такие значения  $k_r$ , которые располагали бы доминирующий вещественный полюс в заданном отрезке, свободные полюса – в области  $\Gamma$  и обеспечивали при этом максимальную степень робастного доминирования  $\gamma = [\eta, \alpha_2]$ .

## 3. Алгебраические соотношения декомпозиционного подхода

Доминирующий полинома имеет вид

$$(2) \quad Q(s) = s + [\alpha], \quad \alpha > 0, \quad \alpha_1 < \alpha < \alpha_2.$$

Разделим ИХП (1) на полином (2) и в результате получим свободный полином  $P(s)$  и остаток от деления  $R$ . Таким образом, исходный характеристический полином (1) можно представить в виде

$$A(s) = Q(s)P(s) + R = s + [\alpha].$$

Свободный полинома  $P(s)$  имеет вид:

$$(3) \quad P(s) = \sum_{i=0}^{n-1} [p_i] s^i, \quad \underline{p}_i < p_i < \overline{p}_i$$

При этом в (3)  $\underline{p}_i = \underline{a}_j \alpha^{j-i-1}$  если  $(-1)^{j-i-1} = 1$  или  $\underline{p}_i = \overline{a}_j \alpha^{j-i-1}$   $(-1)^{j-i-1} = -1$  и наоборот для  $\overline{p}_i$ .

Выражение для остатка  $R$  имеет вид

$$(4) \quad R = \sum_{i=0}^n [a_i] [\alpha]^i (-1)^i,$$

где  $n$  – степень характеристического полинома (1) замкнутой системы.

## 4. Основные соотношения для определения зависимых настроек регулятора

В [6] установлено, что проверочные вершины  $V_1(\underline{a}_0 \overline{a}_1 \underline{a}_2 \dots)$  и  $V_2(\overline{a}_0 \underline{a}_1 \overline{a}_2 \dots)$  задают соответственно правую  $\alpha_1$  и левую  $\alpha_2$  границы доминирующего вещественного корня (рис. 1). Отсюда следует, что (4) при  $s = \alpha_1$  определяется выражением

$$(5) \quad R_1 = \sum_{i=0}^n [a_i] [\alpha]^i (-1)^i, \quad \text{где } a_i = \underline{a}_i \text{ для } i = 0, 2, 4 \text{ и } a_i = \overline{a}_i \text{ для } i = 1, 3, 5$$

При  $s = \alpha_2$  имеем

$$(6) \quad R_2 = \sum_{i=0}^n [a_i] [\alpha]^i (-1)^i, \quad \text{где } a_i = \overline{a}_i \text{ для } i = 0, 2, 4 \text{ и } a_i = \underline{a}_i \text{ для } i = 1, 3, 5$$

На основании (5)-(6) из условия составляется система уравнений для вершин  $V_1$  и  $V_2$  вида

$$(7) \quad \begin{cases} R_1(\vec{k}) = a_0(\vec{k}) - \alpha_1 p_0(\vec{k}) = 0; \\ R_2(\vec{k}) = a_0(\vec{k}) - \alpha_2 p_0(\vec{k}) = 0. \end{cases}$$

Выражаем из каждого уравнения системы (7) параметр  $k_0$

$$(8) \quad \begin{cases} k_0(k_1, k_2) = F_1(k_1, k_2); \\ k_0(k_1, k_2) = F_2(k_1, k_2). \end{cases}$$

Приравняв полученные в (8) выражения, получим зависимость  $k_2(k_1)$

$$(9) \quad k_2(k_1) = F_1(k_1) - F_2(k_1)$$

## 5. Основные соотношения для определения свободных настроек регулятора и максимальной степени доминирования

Так как степень робастного доминирования вещественного корня определяется длиной отрезка  $\gamma = [\eta, \alpha_2]$ , то задачу максимизации степени доминирования предлагается решать на основе максимизации показателя  $\eta$ . Для этого предлагается применить к интервальному свободному полиному робастное расширение [7] и максимизировать его минимальную степень устойчивости. При этом необходимо рассматривать определенные вершины-кандидаты на минимальную степень устойчивости, полученные в [6]. Таким образом, предлагаемый подход основан на решении максиминной задачи: определение робастных настроек линейного регулятора, при которых достигается максимум минимальной степени устойчивости интервального свободного полинома в вершинах-кандидатах.

Вершинный свободный полином имеет вид:

$$(10) \quad P(s, k_1)_{V_q} = \sum_{i=0}^n p_i(k_1)_{V_q} s^i, q \in \overline{1, V},$$

где  $q$  – номер вершины.

Подставим в (10)  $s = \eta + j\beta$  и получим полином

$$(11) \quad P(\eta, \beta, k_1)_{V_q} = \sum_{i=0}^n p_i(k_1)_{V_q} (\eta + j\beta)^i, q \in \overline{1, V}.$$

Разделим полином (11) на вещественную и мнимую части и составим систему уравнений вида

$$(12) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}P(\eta, \beta, k_1)_{V_q} = 0; \\ \operatorname{Im}P(\eta, \beta, k_1)_{V_q} = 0; \\ \frac{\partial \operatorname{Re}P(\eta, \beta, k_1)_{V_q}}{\eta} = 0. \end{cases}$$

Решив систему (12)  $V$  раз, получим  $V$  наборов значений параметров регулятора и соответствующие им значения  $\eta_{V_{\max}}$  максимальной степени устойчивости системы в каждой из вершин-кандидатов. Необходимо выбрать вершину  $q, q \in \overline{1, V}$  с наименьшей максимальной степенью устойчивости  $\eta_{q_{\min}}$  и полученное для нее значение параметра регулятора  $k_1 = k_1^*$

Далее при  $k_1 = k_1^*$  следует во всех остальных вершинах-кандидатах найти степени устойчивости  $\eta_z(k_1^*), z \in \overline{1, V}, z \neq q$ . Для этого предлагается решить  $V$  уравнений

$$(13) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}P(\eta, \beta)|_{k_1 = k_1^*} = 0; \\ \operatorname{Im}P(\eta, \beta)|_{k_1 = k_1^*} = 0. \end{cases}$$

и сравнить найденные значения  $\eta_z(k_1^*)$  с  $\eta_{q_{\min}}$ . Если  $\eta_z(k_1^*) > \eta_{q_{\min}}$ , то задача решена. Иначе необходимо продолжить исследования и составить систему вида (12) для всех пар вершин-кандидатов многогранника  $P_q$ . Такая система уравнений для пары вершин с индексами  $i$  и  $j$  будет иметь вид:

$$(14) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}P(\eta, \beta_1, k_1)_{V_i} = 0; \\ \operatorname{Im}P(\eta, \beta_1, k_1)_{V_i} = 0; \\ \operatorname{Re}P(\eta, \beta_1, k_1)_{V_j} = 0; \\ \operatorname{Im}P(\eta, \beta_1, k_1)_{V_j} = 0. \end{cases}$$

Необходимо решить систему (14)  $C_2^V$  раз (число сочетаний из  $V$  по 2) и из всех решений выбрать то, которое дает минимальное значение  $\eta_{\min}$ .

## 6. Методика синтеза ПИД-регулятора

Разработана методика параметрического синтеза регулятора, обеспечивающий максимальную степень робастного доминирования. Она состоит из следующих этапов.

1. На основании заданного отрезка  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$  и выражений (2), (3), (4) сформировать интервальный доминирующий полином  $Q(s)$ , интервальный свободный полином  $P(s)$  и интервальный остаток  $R$ .
2. На основании (10), (11) получить зависимости  $k_0(k_1, k_2)$  и  $k_2(k_1)$ .
3. На основании [6] выбрать вершины-кандидаты на минимальную степень устойчивости интервального свободного полинома  $P(s)$ .
4. На основании условий (12)-(14), найти максимум минимальной степени устойчивости  $\eta_{\max}$  и соответствующее значение параметра регулятора  $k_1$ .
5. На основании зависимостей, полученных в п. 2 находятся значения параметров  $k_2$  и  $k_0$ .

## 7. Числовой пример

На основе разработанной методики проведем параметрический синтез робастного ПИД-регулятора системы управления движением необитаемого подводного аппарата [8]. Необходимо определить настройки регулятора, обеспечивающие максимальную степень доминирования заданного вещественного полюса  $\alpha \in [0.9, 2]$ .

В результате определены настройки ПИД-регулятора  $k_0 = 0.02$ ,  $k_1 = 0.006$ ,  $k_2 = 0.000075$ ,  $\gamma = 28.5$ . Для подтверждения результатов построены области локализации корней полинома (рис. 2а) и переходные процессы системы в вершинах, определяющих границы отрезка вещественного полюса системы.

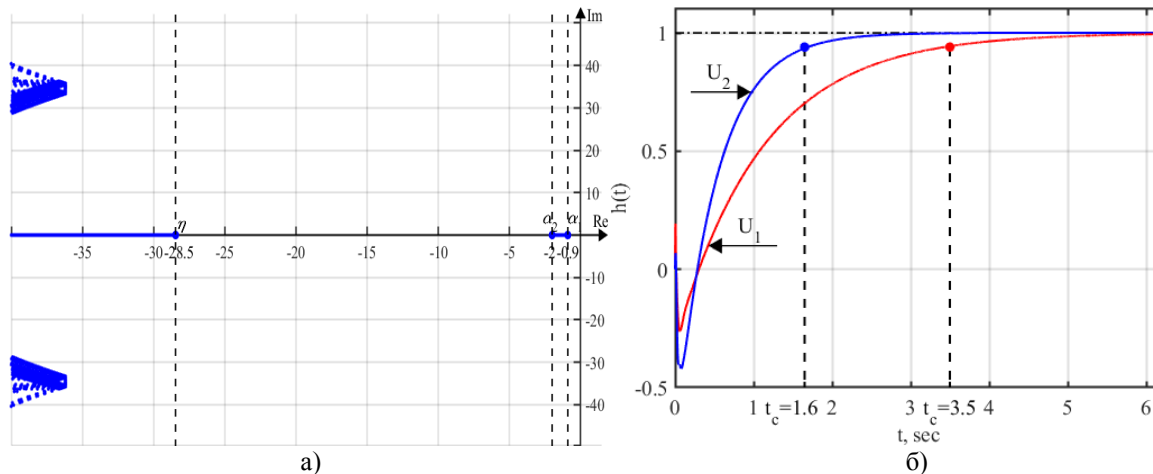


Рис. 2. Графики: а) областей локализации корней, б) переходные процессы.

## 8. Заключение

Решена задача параметрического синтеза линейного регулятора, обеспечивающего в ИСУ аperiodический характер переходных процессов. В основу разработанного подхода положена процедура разделения полинома на доминирующий и свободный. Для размещения свободных корней полинома на максимально возможном удалении от мнимой оси разработана методика параметрического синтеза линейных регуляторов на основе метода нелинейного программирования. Они обеспечивают максимальную степень доминирования корней полинома и гарантируют аperiodический вид переходных процессов в системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 24-29-00645.

## Список литературы

1. Fiser J., Skopec P., Zítek P., Vyhliđal T., Knobloch J. Dominant root locus in state estimator design for material flow processes: A case study of hot strip rolling // *ISA Transactions*. 2019. vol. 68, P. 381-401.
2. Glumov V.M., Puchkov A.M., Seleznev A.E. Design and analysis of lateral motion control algorithms for an unmanned aerial vehicle with two control surfaces // *Automation and Remote Control*. 2017. Vol. 78, No. 5. P. 924-935.
3. Mandić P.D., Šekara T.B., Lazarević M.P., Bošković M. Dominant pole placement with fractional order PID controllers: D-decomposition approach // *ISA Transactions*. 2017. Vol. 67. P. 76-87.
4. Meerov M.V., Jury E.I. On aperiodicity robustness // *International Journal of Control*. 1998. Vol. 70, No. 2. P. 193-201.
5. I.E.K. Mekki, M. Bouhamida and M. Saad. Robust control of a chemical multivariable system in the presence of strong uncertainties in the model parameters // *International Review of Automatic Control*. 2018. Vol. 11, No. 4. P.166-173.
6. Gayvoronskiy S.A., Ezangina T., Pushkarev M., Khozhaev I. Determination of vertex polynomials to analyse robust stability of control systems with interval parameters // *IET Control Theory and Applications*. 2020. Vol. 14. No. 18. P. 2825-2835.
7. Татаринов А.В., Цирлин А.М. Задачи математического программирования, содержащие комплексные переменные, и предельная степень устойчивости линейных динамических систем // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 1995. № 1. С. 28-33.
8. Khozhaev I.V., Ezangina T.A., Gayvoronskiy S.A., Sukhodoev M.S. Multivariable control system of vertical motion for an unmanned underwater vehicle with interval parameters. // *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*. 2017. Vol. 7, No. 6. P. 679-683.