УДК 519.837

ОБЛАСТЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ СИММЕТРИЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ В ИГРЕ НА РАЗОРЕНИЕ

А.А. Ивашко
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
Россия, 185910, Республика Карелия, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
E-mail: aivashko@krc.karelia.ru

В.В. Мазалов
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
Россия, 185910, Республика Карелия, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
E-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

Ключевые слова: Задача о разорении, случайное блуждание, оптимальная стратегия.

Аннотация: Рассмотрена задача о разорении игрока. На каждом из n шагов два игрока наблюдают за симметричным случайным блужданием по целочисленной строке. У одного из игроков есть ресурс ограниченного размера. У другого игрока ресурс не ограничен. Найдены выигрыши игроков. Представлены численные результаты моделирования значений выигрышей для различных значений n.

1. Введение

В работе рассматривается следующая многошаговая модель в дискретном времени. Ведется наблюдение за случайным блужданием, связанным с задачей о разорении [1–3]. В таких задачах на каждом шаге частица перемещается по целочисленной строке на единицу вправо при выигрыше игрока и на единицу влево, при проигрыше. Соответственно, капитал игрока увеличивается или уменьшается на единицу в зависимости от победы или поражения. При этом начальный капитал игрока фиксирован и случайное блуждание, достигнув этого уровня, поглощается, что рассматривается как момент разорения игрока. Предполагается, что случайное блуждание симметричное, что соответствует одинаковым шансам игрока на победу и поражение. Целью игрока является увеличить свой капитал как можно больше, при этом не разоряясь.

2. Игра на разорение

В работе рассматривается задача о разорении следующего вида. В начале игры задан интервал времени n. Случайное блуждание по целочисленной строке начинается с 0 и на каждом шаге i ($i = 1, 2, ..., n$) перемещается на $+1$ вправо или на -1 влево. При этом, игрок может выиграть и проиграть с одинаковой вероятностью $1/2$. Пусть на шаге i мы находимся в состоянии (p, q), где p – количество $+1$, а q – количество -1, $i = p + q$. Мы переходим в состояние $(p+1, q)$ с вероятностью $1/2$, и в состояние $(p, q+1)$ с вероятностью $1/2$.

Обозначим $X_1, ..., X_n$ – последовательность случайных величин, принимающих значения $+1$ или -1, соответствующих рассмотренному выше случайному блужданию. Тогда $S_i = \sum\limits_{j=1}^{i} X_j$, $i = 1, 2, ..., n$, $S_0 = 0$ – разность между числом $+1$ и -1 в течение i шагов, то есть положение частицы в момент времени i.

Последовательность значений $X_1, , , X_n$ формирует некоторую траекторию на плоскости (см., например, рис. 1).

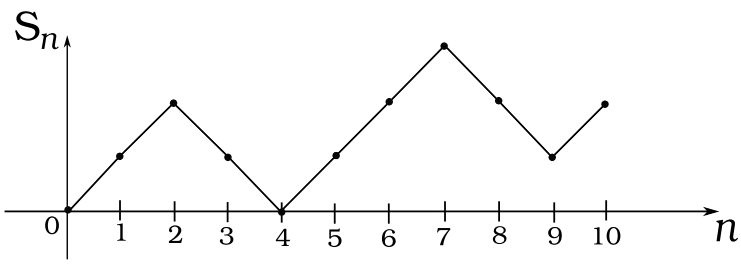

Рис. 1. Пример траектории S_n для $n = 10$.

Опишем игру, связанную с данным случайным блужданием. Имеется два игрока I и II, которые наблюдают за случайным блужданием. У одного из игроков (II) есть ресурс равный $a, a \geqslant 0$. У другого игрока (I) ресурс не ограничен. На каждом шаге игроки играют друг с другом, имея одинаковые шансы. На каждом шаге они платят величину c за эту игру. Как только ресурс игрока II исчерпан, игра прекращается и игрок I получает выигрыш, равный 1. Если в течение промежутка времени n игра не закончилась, игроки ничего не получают. При этом, их затраты составят $-nc$. Предположим, что a и n одной четности, так что траектория может закончиться в состоянии (n, a).

Каждый игрок использует стратегию следующего вида. Игрок II играет, пока не закончится его ресурс. Это значит, что случайное блуждание S_i достигнет уровня a. Игрок I в любой момент может прекратить игру. Будем искать его оптимальную стратегию.

Предположим, что игрок I играет до тех пор, пока не закончится ресурс у игрока II, либо пока время игры не истечет. Обозначим $V_n(a)$ – выигрыш игрока I в данной задаче, тогда

$$V_n(a) = 2^{-a} \sum_{i=0}^{\frac{n-a}{2}} \binom{a+2i}{i} 2^{-2i} \frac{a(1-(a+2i)c)}{a+2i} - cn2^{-n} \sum_{i=\frac{n-a}{2}}^{\frac{n+a}{2}-1} \binom{n}{i}.$$

Приравнивая выигрыш $V_n(a) = 0$, можно найти границу оптимальной остановки игрока I.

В таблице 1 представлены численные результаты выигрышей игрока I для различных значений n и стратегий a игрока II при $c = 0.01$.

Таблица 1. Выигрыш $V_n(a)$ для различных значений n и a при $c = 0.01$

n	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$
10	0.481	0.260	0.134	0.0125
20	0.556	0.363	0.220	0.085
30	0.581	0.399	0.252	0.115

Список литературы

1. Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume 1. Wiley Series in Probability and Statistics (Vol. 82). 3rd edition. Wiley, 1991.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. Т. 1. М.: МЦНМО, 2021.
3. Asmussen S., Albrecher H. Ruin Probabilities. World Scientific, Singapore, 2010.