УДК 519.816

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В БЕЗОПАСНЫХ СТРАТЕГИЯХ

М.Б. Искаков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: mih_iskakov@mail.ru

Ключевые слова: равновесие в безопасных стратегиях, равновесие Нэша, теоремы существования решения игровых задач, теорема Рени, теорема социального равновесия Дебре, задача Хотеллинга, задача Таллока-Скапердаса.

Аннотация: Доклад представляет текущие результаты, продолжающие цикл статей 2018, 2022, 2023 годов посвященный теоретическому обоснованию равновесия в безопасных стратегиях (РБС), как концепции решения игровых задач. По ранее опубликованному методу (метатеореме существования РБС) из известной теоремы Рени существования равновесий Нэша получены теоремы существования РБС, из которых в докладе представлена одна.

Доклад представляет центральный результат статьи поданной в журнал «Управление большими системами», оформленный в конспективном виде. Данная статья является непосредственным продолжением статей [2] и [1]. Статьи написаны по плану сформулированному совместно с Клодом д'Апремоном и Алексеем Искаковым во время работы над статьей [4]. Автор выражает глубокую благодарность своим соавторам. План теоретического обоснования равновесия в безопасных стратегиях как концепции решения игровых задач предполагал преодоление ряда проблем. В настоящий момент разрешены следующие из них. 1) В качестве теоретической основы метода сформулирован вывод определения равновесия в безопасных стратегиях (РБС) как развитие концепции теоретико-игрового равновесия по Нэшу (РН). 2) На этой основе разработан метод конструирования теорем существования РБС из известных теорем существования РН. При этом исходная теорема существования РН приводится к стандартной формулировке, которая, как условие, вставляется в текст мета-теоремы существования РБС. 3) Метод конструирования теорем существования опробован на трех исходных теоремах: Дебре (1952), Рени (1999), Бика (2009). 4) Полученные теоремы существования РБС опробованы и доработаны на хрестоматийных задачах Хотеллинга, Таллока-Скапердаса, Бертрана-Эджворта, не имеющих РН при некоторых значениях параметров. При этом, если условия стандартной формулировки не выполняются для тестовых задач, слишком жесткие, то разрабатывается смягченный вариант теоремы, под условия которого попадают тестовые задачи. 5) Таким образом, в рамках общего метода сформулированы три рабочих теоремы существования РБС решений, применимые на тестовых эталонных задачах. Разрешение первого пункта плана опубликовано в [2], второго – в [1]. В первой из статей дается система определений РБС выведенная из определения РН, а также обсуждается место концепции РБС среди других моделей ограниченной рациональности. Во второй статье на основе этой аналогии строится метод конструирования теорем существования РБС из известных теорем существования РН. Теорема существования РБС по теории существования социального равновесия Дебре [3], с тестированием на указанных задачах опубликована в совместной работе [4]. В указанной статье предложенный метод получения теорем существования РБС тестируется на теории существования РН Рени [5].

Метатеорема как метод конструирования теорем существования РБС основана на двух идеях. Первой составляющей является понятие сильной угрозы.

Определение 1. ***Угроза*** *игроку i в профиле s является* ***сильной****, если существует безопасная стратегия $s' = (s_i', s_{-i})$ такая, что $u(s') = v(s') > v(s)$. Для игрока i в игре G выполняется* ***условие сильных угроз****, если для него содержащиеся в любом опасном профиле угрозы являются сильными. Игра G называется игрой* ***с сильными угрозами****, если для всех игроков в ней выполняется условие сильных угроз.*

Вторая составляющая идеи метатеоремы существования РБС состоит в том, что если для игры выполняется требование сильных угроз и имеется некоторая известная теорема существования равновесия Нэша, то можно потребовать выполнения условий этой теоремы только на безопасном множестве (или даже на некотором предпочтительном подмножестве этого множества, содержащего в себе наилучшую безопасную альтернативу – достигаемое максимальное значение безопасного выигрыша), и этого будет достаточно для существования РБС.

Пусть имеется некоторое верное утверждение (исходная теорема): «*Если для игры выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша*». Пусть это условие (#####) выполняется на множествах безопасных стратегий игроков. Такое предположение надо сформулировать строго.

Определение 2. *Пусть дана игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ с множествами безопасности $Q^{(i)} \subseteq S$. Игра $\bar{G}_{Q^{(i)}}(S_i, \bar{u}_i), \bar{u}_i(s) = \begin{cases} u_i(s), s \in Q^{(i)} \\ C_{min}, s \notin Q^{(i)} \end{cases}$ называется* ***соответствующей ей обрезанной игрой****. Условие (#####) существования равновесия Нэша* ***выполняется для игры G на безопасных множествах*** *$Q^{(i)} \subseteq S$, если оно выполняется для соответствующей обрезанной игры.*

Таким образом, если для игры выполняются два условия: *условие теоремы существования равновесия Нэша на безопасном множестве* и *условие сильных угроз*, то можно ожидать, что в данной игре имеется РБС. Условие исходной теоремы (#####) обеспечивает наличие равновесия в нужном множестве, а условие сильных угроз гарантирует его устойчивость в смысле РБС для всей игры. Метатеорема:

Теорема 1. *Пусть верно утверждение: «Если для игры выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша». Если для игры $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ выполняется условие сильных угроз, а на её безопасных множествах $Q^{(i)} \subseteq S$ выполняется условие (#####) существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях.*

Локальный вариант теоремы. Утверждение теоремы носит общий характер и содержательно слабо, так как требуемые в ней условия достаточно сильны. Ослабление условия *сильных угроз* заключается в том, что его выполнение требуется только по отношению к некоторому множеству $B = \times_{i=1}^N B_i$, где множества B_i предполагаются компактными выпуклыми подмножествами S_i.

Определение 3. *Для игрока i выполняется* ***условие сильных угроз в B****, если для каждого $s_{-i} \in B_{-i}$ существует непустое подмножество $\tilde{Q}_i(s_{-i}) \subseteq Q_i(s_{-i}) \cap B_i$ такое, что для каждой стратегии $s_i \notin \tilde{Q}^{(i)}$ существует стратегия $s_i' \in \tilde{Q}^{(i)}$ такая, что $u_i(s_i', s_{-i}) = v_i(s_i', s_{-i}) > v_i(s_i, s_{-i})$. Игра G называется игрой* ***с сильными угрозами по отношению к B****, если для всех игроков выполняется условие сильных угроз в B.*

Теорема 2. *Пусть верно утверждение: «Если для игры выполняется условие (#####), то в игре существует равновесие Нэша». Если игра $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ является игрой* *с сильными угрозами по отношению к B, а на её безопасных множествах $Q^{(i)} \subset S$ выполняется условие (#####) существования равновесия Нэша, тогда в игре G существует равновесие в безопасных стратегиях.*

Статья Рени [5] предлагает результат существования равновесий по Нэшу в чистых стратегиях для большого класса разрывных игр. Её результаты основаны на условии, называемом *гарантией лучшего ответа*. Игра гарантирует лучший ответ, если для каждой неравновесной стратегии s^* и каждого предела вектора выигрыша u^*, возникающего при приближении стратегий игроков к s^*, у некоторого игрока i имеется стратегия, приносящая выигрыш строго выше u_i, даже если другие игроки слегка отклоняются от s^*. Главный результат заключается в том, что игры с компактными выпуклыми пространствами стратегий и с выигрышами, которые являются квазивогнутыми по собственным стратегиям, обладают равновесием по Нэшу в чистых стратегиях, если, при этом, они гарантируют лучший ответ.

Гарантия лучшего ответа объединяет и обобщает два условия: *взаимную верхнюю полунепрерывность* и *гарантию выигрыша*. Игра взаимно верхне полунепрерывна, если всякий раз, когда выигрыш какого-либо игрока прыгает вниз, выигрыш какого-то другого игрока прыгает вверх. Игра гарантирует выигрыш, если для каждого вектора стратегий s, у каждого игрока есть стратегия, которая фактически гарантирует ему выигрыш, который он получает в s, даже если другие игроки сыграют немного иначе, чем в s. Оба условия выполняются во многих экономических играх, и их часто довольно просто проверить. Формально эти понятия задаются следующим образом.

Определение 4. (Reny 1). *Игрок i* ***может гарантировать выигрыш*** *$\alpha \in \mathbb{R}$ при $s \in S$ если существует $s_i' \in S_i$, такое что $u_i(s_i', s_{-i}') \geq \alpha$ для всех s_{-i}' в некоторой открытой окрестности s_{-i}.*

Определение 5. (Reny 2). *Игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$* ***гарантирует лучший ответ****, (better-reply secure – BRS) если всякий раз когда (s^*, u^*) находится в замыкании графика её вектора выигрышей и s^* не является равновесием, некоторый игрок i может гарантировать выигрыш строго больше u_i^* в профиле s^*.*

Теорема 3. (Reny). *Если игра $G = (S_i, u_i)_{i=1}^N$ компактна, квазивогнута и гарантирует лучший ответ, то она обладает равновесием Нэша в чистых стратегиях.*

Точки перескока. Рассмотрим более подробно условие гарантированного лучшего ответа. Если записать отрицание определения Рени-2 гарантирования лучшего ответа, привязанное к профилю s^*, то получится следующее.

Определение 6. *Профиль s^*, не являющийся равновесием Нэша, называется* ***негарантирующим лучший ответ*** *(или* ***точкой перескока****) в игре $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$, если $\exists (s^*, u^*) \in \overline{\Gamma(G)}: \forall i, \forall \alpha > u_i^*, \forall\, s_i' \in S_i, \forall$ окрестности $U(s_{-i}^*) \subset S_{-i}$ (то есть открытого множества, содержащего s_{-i}^*), $\exists s_{-i}' \in U(s_i', s_{-i}^*)$ такое, что $u_i(s_i', s_{-i}') < \alpha$.*

Для игр двух участников с одномерными стратегиями и кусочно-непрерывными функциями лучшего ответа возможны только два случая перескока: перескок одной функции через непрерывную другую и встречный перескок двух. Только при наличии таких точек, в которых нарушается условие лучшего гарантированного ответа Рени, в игре возможно отсутствие равновесия Нэша. Соответствующие точки однозначно определяются либо как точка разрыва функции одного игрока и значение функции другого, либо как точки разрыва функции обоих игроков.

Воспользуемся мета-теоремой 2, подставив в неё условия теоремы 3 Рени. Конкретизируем условие (#####) для случая теоремы Рени. Игра должна быть *компактна*, *квазивогнута* и *гарантировать лучший ответ* на безопасных множествах. Компактная игра, естественно будет компактной и на безопасных множествах.

Определение 7. *Игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ ***квазивогнута на безопасных стратегиях****, если для любого игрока i при любом окружении* s_{-i} *функции* $u_i(s)$ *квазивогнуты по* s_i *при* $s_i \in Q_i(s_{-i})$.

Определение 8. *Игрок i* ***имеет гарантированный безопасный ответ при окружении*** s_{-i} *, если* $\exists s'_i \in S_i, \exists$ *открытая окрестность* $U_{s_{-i}} \subseteq S_{-i}, \forall s'_{-i} \in U_{s_{-i}}: s' = (s'_i, s'_{-i}) \in Q^{(i)}$. *Игрок i* ***имеет гарантированный безопасный ответ в игре*** G *, если он его имеет при любых окружениях.*

Определение 9. *Небезопасный для игрока i профиль s* ***доминируется безопасными стратегиями****, если угроза игроку i в нём является сильной и у него имеется гарантированный безопасный ответ. Для игрока i* ***безопасные стратегии доминируют при окружении*** $\boldsymbol{s_{-i}}$ ***(в игре G)****, если любая небезопасная для него стратегия при окружении* s_{-i} *(в игре G) доминируется безопасными стратегиями. Игра G называется* ***доминирующей в безопасных стратегиях****, если безопасные стратегии доминируют для всех игроков.*

Определение 10. *Безопасная стратегия* s_i *игрока i в профиле s, не являющимся РБС,* ***имеет гарантированный лучший ответ в безопасных стратегиях****, если* $\forall (s, u) \in \overline{\Gamma(\bar{u})}, \exists \alpha > u_i, \exists s'_i \in Q_i(s_{-i}), \exists$ *открытая окрестность* $U_{s_{-i}} \subseteq S_{-i}: \forall s'_{-i} \in U_{s_{-i}}: s' = (s'_i, s'_{-i}) \in Q^{(i)}$ *(безопасен для i) и* $u_i(s') \geq \alpha > u_i$.

Теперь, наконец, можно собрать то условие, которое требуется теоремой Рени, *гарантия лучшего ответа*, помня о том, что в каждом профиле требуется его выполнение хотя бы для одного игрока.

Определение 11. *Игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ ***гарантирует лучший ответ в безопасных стратегиях****, если* $\forall s \in S, \exists$ *игрок i такой что: он имеет гарантированный безопасный ответ, если его стратегия* s_i *не безопасна, и гарантированный лучший ответ в безопасных стратегиях, если его стратегия* s_i *безопасна.*

Теорема существования РБС по Рени будет иметь следующий вид.

Теорема 4. *Игра* $G(S_i, u_i)_{i=1}^N$ *компактна, квазивогнута на безопасных стратегиях, все множества безопасных стратегий в ней являются выпуклыми компактными множествами, гарантирует лучший ответ в безопасных стратегиях, с сильными угрозами, тогда в игре G существует РБС.*

Список литературы

1. Искаков М.Б., Теоремы существования равновесия Нэша и равновесия в безопасных стратегиях // Журнал новой экономической ассоциации. 2022, № 4 (56). С. 12-27
2. Искаков М.Б., Искаков А.Б., Равновесие в безопасных стратегиях как развитие концепции равновесия Нэша // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2023. Т. 15, Вып. 1. С. 48-72.
3. Debreu G. A social equilibrium existence theorem // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1952. No. 38 (10). P. 886-893.
4. Iskakov M., Iskakov A. d'Aspremont C. Games for cautious players: the Equilibrium in Secure Strategies // Games and Economic Behavior. 2018. Vol. 110. P. 58-70.
5. Reny P.J.. On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games // Econometrica. 1999. Vol. 67, No. 5. P. 1029-1056.