УДК 519.816

О КОРРЕКТНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СУММ РАНГОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

В.П. Корнеенко
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vkorn@ipu.ru

Ключевые слова: экспертное оценивание, каноническая шкала, сумма рангов, адекватность преобразований, многокритериальный выбор.

Аннотация: При решении многокритериальных задач выбора эффективного варианта объектов, представленных в разнотипных шкалах (количественных, порядковых) измерения, применение аддитивного механизма агрегирования исходных оценок объектов некорректно. Корректное применение аддитивного механизма агрегирования исходных данных объектов возможно, если исходные данные объектов преобразованы в результирующую однородную шкалу, т.е. с одинаковым размахом критериев. В качестве такой результирующей шкалой может служить порядковая ранговая шкала. В работе предлагается подход, при котором результаты преобразования оценок объектов в ранговую шкалу при решении многокритериальных задач выбора будут инвариантны при любых количественных преобразованиях исходных шкал.

1. Введение

При многокритериальной оценке эффективности объектов (проектов, вариантов решений, стратегий развития и т.п.) возникает задача построения результирующих шкал объектов, исходные шкалы которых разнотипны [1]. При этом в литературе часто обсуждается вопрос о корректности использования количественных преобразований, например, среднего ранга или среднего арифметического при индивидуальном или групповом экспертном оценивании объектов в порядковых шкалах [2-4]. Общепринятой считается точка зрения, что при переходе к эквивалентным порядковым шкалам с помощью монотонно возрастающих преобразований результаты оценивания будут различными [2, 3].

Покажем, что при определённых условиях результаты оценивания будут инвариантны при количественных преобразованиях оценок в исходных шкалах в ранги результирующей канонической шкалы. Формализуем это утверждение, когда отношения на множестве объектов представлены в виде ранжирований или в виде оценок в количественных или порядковых балльных шкалах.

2. Представление данных объектов в ранговой шкале

2.1. Ранжирование объектов по оценкам в количественной шкале

Обозначим через $A = \{a_1, \dots, a_l \dots, a_n\}$ – множество оцениваемых объектов, n – число объектов, $F = \{f_1, \dots, f_i \dots, f_m\}$ – множество показателей (критериев), по которым сравниваются объекты из A, m – число показателей. Тогда результаты оценивания объектов можно представить в виде матрицы $M(A, f) = (x_i^{(l)})$, $i = \overline{1, m}; l = \overline{1, n}$, размерности $m \times n$, где $x_i^{(l)} = f_i(a_l)$ – результат оценивания экспертом объекта a_l по f_i показателю в произвольной порядковой или количественной шкале измерения.

Рассмотрим ранжирование объектов, представляющим

а) строгие отношения предпочтения:

(1) $$P: a_1 \succ a_2 \succ \cdots \succ a_n,$$

где объект с первым номером является наиболее предпочтительным из всех объектов, объект со вторым номером менее предпочтителен первого объекта, но предпочтительнее всех остальных объектов и т. д.;

б) нестрогие отношения предпочтения:

(2) $$P: a_{l_1} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{l_n},$$

где $a_{l_v} \succcurlyeq a_{l_q} \Longrightarrow (a_{l_v} \succ a_{l_q}) \vee (a_{l_v} \approx a_{l_q}) \ \forall\, v, q \in \overline{1, n}$;

$\succ$ – обозначение строгого предпочтения объектов;

$\succcurlyeq$ – обозначение нестрогого предпочтения объектов;

$\vee$ – логическая операция «или».

Свойствам отношения строгого порядка удовлетворяет числовая система шкалы [5], элементами которой являются действительные числа, связанные между собой отношением строгого неравенства > (<). Это означает, что упорядочению объектов (1) по показателю $f_i, i = \overline{1, m}$, соответствует упорядочение чисел:

(2) $$x_i^{(1)} > x_i^{(2)} > \cdots > x_i^{(n)}.$$

Возможна и обратная последовательность

(3) $$x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \cdots < x_i^{(n)},$$

в которой наиболее предпочтительному объекту a_1 приписывается наименьшее число $x_i^{(1)}$, характеризующее место или рейтинг объекта, и, по мере возрастания предпочтения в (3), объектам приписываются большие числа.

2.2. Преобразование исходных оценок в градации ранговой шкалы

Соответствие последовательностей (1) и (2) или (1) и (3), т.е. их изоморфизм или гомоморфизм можно осуществить, выбирая любые числовые представления. В практике ранжирования чаще всего применяется числовое представление последовательностей (2) и (.3) в виде натуральных чисел:

(4) $$x_i^{(1)} = n,\ x_i^{(2)} = n - 1, \ldots, x_i^{(n)}=1,$$

либо

(5) $$x_i^{(1)} = 1,\ x_i^{(2)} = 2, \ldots, x_i^{(n)} = n,$$

т.е. используются числовые последовательность типа (4) и (5).

При прямом (обратном) ранжировании числа $x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$, удовлетворяющие соотношениям (4), (5) называются *рангами* (местами) по показателю $f_i \in F$ и обычно обозначаются в виде: $r_i^{(1)},\ r_i^{(2)}, \ldots, r_i^{(n)}$. В этом случае ранжирование *n* объектов $a_l \in A$ по показателю f_i можно представить в виде векторной оценки

(6) $$\vec{r}_i = (r_i^{(1)}, r_i^{(2)}, \ldots, r_i^{(n)}).$$

В практике ранжирования объектов допускаются как отношения строгого упорядочения, так и нестрогого упорядочения, т.е. эквивалентность некоторых групп объектов. Для эквивалентных объектов удобно, с точки зрения технологии последующей обработки экспертных оценок, назначать одинаковые ранги, равные среднему арифметическому значению рангов, присваиваемых одинаковым объектам. Такие ранги называют связанными рангами [6]. Удобство использования связанных рангов заключается в том, что сумма рангов *n* объектов для любого показателя f_i равна сумме натуральных чисел от единицы до *n*: $r_\Sigma = \sum_{l=1}^{n} r_i^{(l)} = \frac{1+n}{2} \cdot n$.

При этом любые комбинации связанных рангов не изменяют эту сумму.

Определение 1. Будем называть ранговую шкалу канонической, если в качестве градаций при строгом ранжировании *n* объектов множества *A* используются натуральные числа от 1 до *n*. При нестрогом ранжировании со связанными рангами натуральные числа заменяются средними арифметическими рангов эквивалентных объектов.

Рассмотрим преобразования оценок $x_i^{(l)}$ в количественной шкале измерения объектов a_l по f_i показателю в ранговые градации:

а) при прямом направлении предпочтений объектов (чем больше значение $x_i^{(k)}$ оценки, тем предпочтительнее объект) преобразование имеет вид:

(7) $$\pi_r^{\downarrow}\colon x_i^{(l)} \to r_i^{(l)} = n - (l-1),$$

где $r_i^{(l)} = n - (l-1)$ – ранг, сопоставляемый a_k объекту по f_i критерию;

б) при обратном направлении предпочтений объектов (чем меньше значение $x_i^{(k)}$ оценки, тем предпочтительнее объект) введём преобразование:

(8) $$\pi_r^{\uparrow}\colon x_i^{(l)} \to r_i^{(l)} = l,$$

где $r_i^{(l)} = l$ – ранг, сопоставляемый $a_l \in A$ объекту по f_i показателю.

Определение 2. Преобразование, переводящее произвольную порядковую или количественную шкалу в каноническую, будем называть каноническим прямым (7) или обратным (8) ранговым преобразованием.

В зависимости от направления предпочтения (прямого или обратного) каноническую ранговую шкалу будем называть соответственно прямой или обратной канонической ранговой шкалой.

2.3. Постановка задачи многокритериального выбора

Рассмотрим теперь суммы рангов ранжирований, полученные объектами по всем рассматриваемым показателям с точки зрения предпочтений эксперта [7]. Единицей измерения здесь является один ранг, характеризующий, что один объект предпочтительнее другого. В качестве обобщённого показателя качества каждого объекта примем аддитивную свёртку с весами $w_i = w(f_i), i = \overline{1,m}$, важности показателей [8]:

(9) $$F(a_l, w_1, \dots, w_m) = \sum_{i=1}^{m} w_i\, r_i^{(l)}, \sum_{i=1}^{m} w_i = 1,$$

где $r_i^{(l)} = \pi(f_i(a_l))$ – оценка a_l объекта в результирующей порядковой шкале.

Тогда оценки по обобщённому показателю *F* (9) для каждого a_l объекта будут равны: $r_\Sigma^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} w_i\, r_i^{(l)}$, а при равноважности f_i критериев, т.е. $w_i = 1$ для $\forall\ i = \overline{1,m}$, в виде суммы рангов:

(10) $$r_\Sigma^{(l)} = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(l)}.$$

Исходя из обобщённой оценки в виде суммы рангов (10) при прямом направлении предпочтений объектов получим обобщённую ранжировку объектов по множеству показателей:

(11) $$P_\downarrow\colon a_1 \succ \dots \succ a_n \Leftrightarrow r_\Sigma^{(1)} > \dots > r_\Sigma^{(n)},$$

а при обратном направлении предпочтения объектов обобщённую ранжировку в виде:

(12) $$P_\uparrow\colon a_1 \succ \dots \succ a_n \Leftrightarrow r_\Sigma^{(n)} < \dots < r_\Sigma^{(n)}.$$

Если обобщённые показатели качества некоторых объектов совпадают, то такие объекты эквивалентны: $a_{l_v} \approx a_{l_q} \Leftrightarrow r_{\Sigma}^{(l_v)} = r_{\Sigma}^{(l_q)}$.

Объединяя строгие (11), (12) и нестрогое (13) ранжирования, получим *обобщённые ранжирования* при прямом (обратном) направлении предпочтения объектов:

$P_{\downarrow}: a_l \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{l_n} \Leftrightarrow r_{\Sigma}^{(l_1)} \geq \ldots \geq r_{\Sigma}^{(l_n)}$ $(P_{\uparrow}: a_{l_1} \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq a_{l_n} \Leftrightarrow r_{\Sigma}^{(l_1)} \leq \ldots \leq r_{\Sigma}^{(l_n)})$.

3. Обоснование корректности сумм рангов в порядковой шкале

3.1. Теорема о корректности суммы рангов

Результаты суммирования при использовании канонических ранговых преобразований не будут зависеть от исходных количественных или порядковых балльных шкал, выбранных экспертом при измерении признаков, и их можно сравнивать между собой в любом качественном или количественном отношении.

Теорема (Корнеенко, Рамеев). *Любые количественные или качественные отношения на множестве объектов, представленные в канонической прямой или обратной шкале оценок, будут адекватными относительно исходного типа шкал.*

Доказательство теоремы. Поскольку допустимыми преобразованиями в исходной количественной или порядковой (балльной, ранговой) шкале являются монотонно возрастающие преобразования, они не будут менять упорядочивание оценок объектов в исходной шкале. Поэтому применение канонических преобразований (7) или (8) не будет изменять соответствующее канонические ранжировки объектов по каждому показателю $f_i, i = \overline{1, m}$. Началом отсчёта в данных шкалах служат ранги, равные единице. Единицей масштаба, т.е. расстоянием между смежными рангами, также является единица. Для абсолютных типов шкал адекватными относительно исходного типа шкал будут любые отношения, как количественные, так и качественные. Другими словами, после применения канонических ранговых преобразований на канонических ранговых шкалах можно выполнять любые вычисления и их результаты будут адекватными относительно исходного типа шкал. В частности, можно сравнивать объекты по числу рангов: во сколько (или на сколько) раз ранг одного объекта больше ранга другого, и т.п.

Таким образом, поскольку оценки объектов по критериям $f_i, i = \overline{1, m}$, преобразованы в ранговые однородные шкалы, т.е. с одинаковыми максимальными и минимальными значениями критериев, а также одинаковыми градациями порядковой шкалы, то применение аддитивного механизма агрегирования (9) корректно. Теорема доказана.

3.2. Пример использования сумм рангов в порядковых шкалах

Рассмотрим пример использования сумм рангов в порядковых шкалах, используя данные из 9, с. 121]. Исходные данные для объектов a_1, a_2 и $a_3 \equiv a_{75}$ представлены в табл. 1.

Таблица 1. Оценки объектов четырьмя экспертами в исходных разнородных шкалах

Объекты	**Оценки альтернатив по критериям в исходных шкалах**			
	$f_1(\uparrow)$	$f_2(\uparrow)$	$f_3(\uparrow)$	$f_4(\downarrow)$
a_1	7,5	344	0,47	12,15
a_2	3,7	268	0,68	12,20
a_3	6,7	250	0,24	12,92

Стрелками показано направление предпочтительности объектов.

Профили объектов представим в виде:

$\vec{x}_1 = (7{,}5; 344; 0{,}47; 12{,}15)$, $\vec{x}_2 = (3{,}7; 268; 0{,}68; 12{,}20)$, $\vec{x}_3 = (6{,}7; 250; 0{,}24; 12{,}92)$.

При рассмотрении профилей можно заметить, что векторная оценка $\vec{x}_1$ объекта a_1 строго доминирует векторную оценку $\vec{x}_3$ объекта a_3 [9]:

$a_1 \succ a_3 \Leftrightarrow \vec{x}_1 \succ \vec{x}_3$, поскольку $x_1^{(1)} > x_1^{(3)}$, $x_2^{(1)} > x_2^{(3)}$, $x_3^{(1)} > x_3^{(3)}$ и $x_4^{(1)} < x_4^{(3)}$, а векторные оценки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ объектов a_1 и a_2 несравнимы между собой, т.е. объекты a_1, a_2 принадлежат множеству недоминируемых (эффективных) объектов.

Покажем, что при использовании канонических порядковых шкал результаты упорядочения объектов и результаты суммирования рангов не будут зависеть от любых монотонных преобразований исходных шкал. Результаты оценивания объектов в канонических порядковых шкалах представлены в табл. 2.

Таблица 2. Оценки объектов четырьмя экспертами в канонических порядковых шкалах

Объекты	**Оценки альтернатив по критериям в ранговой шкале**				
	$f_1(\uparrow)$	$f_2(\uparrow)$	$f_3(\uparrow)$	$f_4(\downarrow)$	**Сумма рангов**
a_1	3	3	2	3	
a_2	1	2	3	2	
a_3	2	1	1	1	

Применим произвольные монотонные преобразования к исходным оценкам в количественных шкалах (см. табл. 1). Например, для первого критерия – возведение в квадрат, для второго критерия – извлечение корня, для третьего критерия – умножение на 2, для четвёртого критерия – деление на 3. Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3. Результаты монотонных преобразований исходных оценок

Объекты	**Оценки альтернатив по критериям в с учётом преобразований шкал**			
	$f_1(\uparrow)$	$f_2(\uparrow)$	$f_3(\uparrow)$	$f_4(\downarrow)$
a_1	56,25	18,55	0,94	4,05
a_2	13,69	16,37	1,36	4,07
a_3	44,89	15,81	0,48	4,31

Нетрудно заметить, что переход к каноническим порядковым шкалам даёт те же результаты, что и в таблице 2. По результатам рассмотрения можно сделать следующие выводы.

1) По мнению группы экспертов наиболее предпочтительным является объект a_1, затем объект a_2, а наименее предпочтительным – объект a_3. При этом объект a_1 более чем в два раза предпочтительнее объекта a_3.

2) Оценки объектов в канонической порядковой шкале при использовании канонических преобразований инвариантны относительно любых монотонно возрастающих преобразований значений исходных шкал.

4. Заключение

В заключение отметим, что в практике ранжирования объектов допускаются как отношения строгого порядка, так и нестрогого порядка, т.е. эквивалентность некоторых групп объектов. В задачах многокритериального оценивания и выбора при построении результирующих количественных шкал необходимо учитывать линейность или нелинейность исходных шкал, в которых измеряются объекты.

Для объектов, представленных в различных шкалах, в качестве результирующих шкал необходимо использовать только канонические, которые одновременно удовлетворяют требованиям линейности и однородности. При этом применение аддитивного механизма оценок объектов в канонических порядковых шкалах корректно.

Список литературы

1. Пфанцагль И. Теория измерения. М.: Мир, 1976. 248 с.
2. Литвак Б.Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа. М.: Радио и связь, 2006. 184. с.
3. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М. : Наука, 1974. 256 с.
4. Новиков Д.А., Орлов А.И. Экспертные оценки – инструменты аналитика // Заводская лаборатория. 2013. Т. 79, № 4. С. 3-4.
5. Рамеев О.А., Корнеенко В.П. Основы теории многокритериального оценивания объектов с многоуровневой структурой показателей эффективности. М. : МАКС Пресс, 2018. 416 с.
6. Кендэл М. Ранговые корреляции. М.: Мир, 1975. 216 с.
7. Корнеенко В.П. Оптимизационный метод выбора результирующего ранжирования объектов, представленных в ранговой шкале измерения // Управление большими системами. 2019. Вып. 82. С. 44-60.
8. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys multiple criteria decision analysis: state of the art surveys / Edited by Jose Figueira, Salvatore Greco, Matthias Ehrgott. Springer, 2005. 1048 p.
9. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.