УДК 519.8

ОБ ОПИСАНИИ РАВНОВЕСИЯ ОЖИДАНИЙ/ДИСКРЕТНОГО ОТКЛИКА В ИГРЕ ИЗИНГА В МЕТОДЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ

А.В. Леонидов
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН
Московский физико-технический институт
Россия, 119991 Москва, Ленинский проспект, д.53
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9.
E-mail:

Ключевые слова: игра Изинга, статистическая сумма

Аннотация: Приведен вывод уравнений, определяющих равновесия ожиданий/дискретного отклика в игре Изинга на полном графе, использующий максимизацию свободной энтропии при вычислении статистической суммы задачи

В докладе рассматривается подход к описанию статических равновесий в игре Изинга [1–3], основанный на анализе характеризующей игру статистической суммы. Игра Изинга определяется как игра N агентов, находящихся в узлах неориентированного графа $\mathcal{G}$ и оснащенных двумя альтернативными чистыми стратегиями с параметризацией $s_i = \pm 1$, $i = 1, \cdots, N$. В дальнейшем будет рассматриваться игра Изинга на полном графе. Анализ статических равновесий в играх с зашумленным дискретным откликом, к которым принадлежит рассматриваемая игра Изинга, основан на рассмотрении ожидаемых полезностей $\mathbb{E}\left[U_i(s_i)\right]$, характеризующих представления агентов относительно ожидаемого выбора их соседей. Рассмотрим простейший вариант игры Изинга на полном графе, для которого

$$\mathbb{E}_{(i)}\left[U_i(s_i)\right] = \frac{J}{N} \sum_{j \neq i} \mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right] s_i + \epsilon_{s_i} \tag{1}$$

где $\mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right]$ – математическое ожидание, характеризующее представления агента i относительно выбора агента j, $J > 0$ – константа, характеризующая взаимное влияние агентов, а переменные ϵ_{s_i} – зависящие от выбранной стратегии случайные вклады в полезность с одинаковым для всех агентов распределением $f(\epsilon_{s_i}|\beta)$, где параметр β характеризует уровень шума. На полном графе представления агентов об окружении одинаковы, так что

$$m_{-i}^{(e)} = \sum_{j \neq i} \mathbb{E}_{(i)}\left[s_j\right] \tag{2}$$

не зависит от i,

(3) $$m_{-i}^{(e)} = m^{(e)} \quad \forall i$$

так что

(4) $$\mathbb{E}_{(i)}\left[U_i(s_i)\right] = Jm^{(e)}s_i + \epsilon_{s_i}$$

Из уравнения (4) следует, что вероятность p_{s_i} выбора стратегии s_i агентом i равна

(5) $$p_{s_i} = \mathrm{Prob}\left[\mathbb{E}_{(i)}\left[U_i(s_i)\right] > \mathbb{E}_{(i)}\left[U_i(-s_i)\right]\right] = F\left(2\beta Jm^{(e)}s_i\right)$$

где

(6) $$F(x|\beta) = \mathrm{Prob}\left[\epsilon_{-s_i} - \epsilon_{s_i} < x\right]$$

В дальнейшем удобно использовать следующую параметризацию функции распределения $F(x)$ (см. напр. [4]):

(7) $$F(x) = \frac{e^{g(x)}}{1+e^{g(x)}} \quad \leftrightarrow \quad g(x) = \log\frac{F(x)}{1-F(x)}$$

Отметим, что для симметричных распределений $f(\epsilon_{\pm s_i}|\beta)$ функция $g(x)$ нечетна. Тем самым для вероятности выбора стратегии s_i агентом i получаем

(8) $$p(s_i|m^{(e)}) = \frac{e^{\frac{1}{2}g(2\beta Js_im^{(e)})}}{2\,\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}g(2\beta Jm^{(e)})\right]} = \frac{e^{\frac{1}{2}s_ig(2\beta Jm^{(e)})}}{2\,\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}g(2\beta Jm^{(e)})\right]}$$

Равновесие ожиданий/дискретного отклика определяется как согласование индивидуального выбора и ожиданий относительно выбора окружения [5] такое, что

(9) $$\mathbb{E}_{(i)}[s_i] = \mathbb{E}_{(j)}[s_i] = m_{\mathrm{eq}} \quad \forall i,j$$

Определеннное таким образом равновесие является частным случаем конкурентного равновесия Байеса-Нэша и, вообще говоря, не связано с какой-либо оптимизационной процедурой. Условие согласования (9) приводит к следующему уравнению на m [4]:

(10) $$m_{\mathrm{eq}} = \tanh\left[\frac{1}{2}g\left(2\beta Jm_{\mathrm{eq}}\right)\right],$$

решения которого и отвечают равновесиям ожиданий/дискретного отклика в рассматриваемой задаче. Покажем, что уравнение (10) можно получить в рамках решения оптимизационной задачи, связанной с рассмотрением характеризующей систему статистической суммы. Для этого заметим, что из уравнения (8) и независимости принятия решений агентами следует: что для характеризующей систему функции распределения $p(s_1,\ldots,s_n|m^{(e)})$ можно записать

(11) $$p(s_1,\ldots,s_n|m^{(e)}) \sim e^{(s_1+\ldots s_N)\frac{1}{2}g(2\beta Jm^{(e)})} = e^{Nm\frac{1}{2}g(2\beta Jm^{(e)})},$$

где

(12) $$m = \frac{1}{N}\sum_i s_i$$

есть среднее по системе от выбранных стратегий. Из уравнения (11) получаем для статистической суммы системы $\mathcal{Z}$ выражение вида:

$$\mathcal{Z} = \sum_{m=-1}^{1} \mathcal{N}(m) \exp\left[Nm\tfrac{1}{2}g(2\beta J m^{(e)})\right] = \sum_{m=-1}^{1} \exp\left[S(m) + Nm\tfrac{1}{2}g(2\beta J m^{(e)})\right] =$$

$$= \sum_{m=-1}^{1} \exp\left\{N\left[m\tfrac{1}{2}g(2\beta J m^{(e)}) - \tfrac{1+m}{2}\ln\tfrac{1+m}{2} - \tfrac{1-m}{2}\ln\tfrac{1-m}{2}\right]\right\},$$

где $\mathcal{N}(m)$ – число конфигураций $(s_1, \ldots, s_n)$ таких, что $\frac{1}{N}(s_1 + \cdots + s_N) = m$.

Рассмотрим максимумы по m статистической суммы $\mathcal{Z}$ или, эквивалентно, свободной энтропии

$$v(m|m^{(e)}) = m\frac{1}{2}g(2\beta J m^{(e)}) - \frac{1+m}{2}\ln\frac{1+m}{2} - \frac{1-m}{2}\ln\frac{1-m}{2} \tag{13}$$

Рассмотрим экстремумы $v(m|m^{(e)})$ по m. Они находятся в точках m_* таких, что

$$\frac{1}{2}g(2\beta J m^{(e)}) = \operatorname{atanh}(m_*) \tag{14}$$

или

$$m_* = \tanh\left[\frac{1}{2}g(2\beta J m^{(e)})\right] \tag{15}$$

Поскольку

$$v''(m|m^{(e)}) = -\frac{1}{1-m_*^2} < 0, \tag{16}$$

то все найденные экстремумы являются m_* максимумами. Поскольку в равновесии дискретного отклика $m_* = m^{(e)} = m_{\mathrm{eq}}$, окончательно получаем уравнение на m_{eq} вида

$$m_{\mathrm{eq}} = \tanh\left[\frac{1}{2}g(2\beta J m_{\mathrm{eq}})\right], \tag{17}$$

т.е. уравнение (10).

Список литературы

1. A. Leonidov, A. Savvateev and A. Semenov, arXiv:1912.09584
2. A. Leonidov, A. Savvateev and A. Semenov, CEUR Workshop Proceedings MACSPro'2020 (2020)
3. A. Leonidov, A. Savvateev and A. Semenov, arXiv:2108.00824
4. L. Blume and S. Durlauf, International Game Theory Review **5** (2003), 193–209
5. J.K. Goeree, C.A. Holt and T.R. Palfrey, Quantal response equilibria, Springer (2016)