УДК 917.977.58

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ УСТРАНЕНИЯ УСТРАНИМОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

А.А. Ершов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

E-mail: ale10919@yandex.ru

Д.Б. Давлетов

Уфимский университет науки и технологий

Россия, 450076, Уфа, ул. Заки Валиди, 32

E-mail: davletovdb@mail.ru

Ключевые слова: устранимая неопределенность, параметрическая неопределенность, управляемая система, пробное управление, задача о сближении.

Аннотация: Рассмотрена задача о сближении с целевым множеством для управляемой системы, в которой на момент начала движения присутствует неопределенный постоянный параметр. Предполагается, что данная параметрическая неопределенность является устранимой, т.е. применив к системе некоторое пробное управление и понаблюдав за реакцией системы, можно восстановить неопределенный параметр. Рассмотрены некоторые алгоритмы восстановления неопределенного постоянного параметра, а именно, на основе правой разностной производной, центральной разностной производной и с применением линейной интерполяции. Приведены оценки погрешности этих алгоритмов.

1. Введение

Многие практические задачи управления имеют параметрическую неопределенность. В части из них имеется так называемая устранимая параметрическая неопределенность. К такому типу неопределенностей относятся те параметры и характеристики системы управления, которые являются априорно неизвестными, но могут быть оценены или вычислены в процессе реальной работы по оперативным данным, поступающих от измерительных систем [1]. Для решения такого рода задач М.С. Никольский в работе [2] предложил следующую общую схему, состоящую из трех этапов:

1) сбор информации о системе,

2) устранение неопределенности,

3) переход к активному управлению.

Здесь мы обсудим первый и второй этапы из этой схемы, а именно, восстановление неопределенного (на момент начала движения) постоянного параметра по двум-трем измерениям фазового состояния системы, начавшей свое движение под действием некоторого кратковременного пробного управления.

2. Постановка задачи

Пусть на конечном промежутке времени $t \in [t_0, \vartheta]$ задана управляемая система

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t), \alpha), \\ x(t_0) = x^{(0)}, \end{cases}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $(t_0, x^{(0)})$ – начальное положение системы, $u(t)$ – допустимое управление, α – постоянный параметр, удовлетворяющий включению $\alpha \in \mathscr{L}$, $\mathscr{L} \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^q)$.

Здесь $\mathbb{R}^k$ – евклидово пространство размерности k, $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^k)$ – пространство компактов в $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой.

Под *допустимым управлением* $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, понимаем измеримую по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$ вектор-функцию со значениями в P, где $P \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^p)$.

Предполагаем выполнеными следующие условия.

A. Вектор-функция $f(t, x, u, \alpha)$ определена, непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathscr{L}$ и для любой ограниченной и замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times R^n$ найдется такая константа $L = L(\Omega) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, \alpha) - f(t, x^{(2)}, u, \alpha)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|,$$

$$(t, x^{(i)}, u, \alpha) \in \Omega \times P \times \mathscr{L}, \ i = 1, 2;$$

здесь $\| \cdot \|$ – евклидовая норма вектора в $\mathbb{R}^n$.

B. Найдется такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, \alpha)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u, \alpha) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathscr{L}.$$

Замечание 1. *Как известно [3, §2.1], условий* **A** *и* **B** *достаточно, чтобы каждому допустимому управлению* $u(t)$ *соответствует движение* $x(t)$*, являющееся решением системы* (1) *в классе абсолютно непрерывных функций. При этом производная* $\dot{x}(t)$ *понимается в обобщенном смысле и для нее выполняется формула Ньютона-Лейбница (см., напр., [4, гл. 2, §4]).*

Замечание 2. *Учитывая условие* **A***, получаем, что для любой ограниченной и замкнутой области* $\Omega \subset [t_0, \Theta] \times \mathbb{R}^n$ *функция*

$$\begin{aligned} \omega^{(1)}(\tau) = \max\{ &\|f(t_*, x, u, \alpha) - f(t^*, x, u, \alpha)\| : \\ &(t_*, x, u, \alpha) \ \text{и} \ (t^*, x, u, \alpha) \ \text{из} \ \Omega \times P \times \mathscr{L}, \ |t_* - t^*| \leqslant \tau\}, \quad \tau \in (0, \infty), \end{aligned}$$

удовлетворяет предельному соотношению $\omega^{(1)}(\tau) \downarrow 0$ *при* $\tau \downarrow 0$.

Для удобства зафиксируем область Ω *так, чтобы в ней содержались всевозможные движения системы* (1) *при всевозможных значениях параметра* $\alpha \in \mathscr{L}$ *вместе с некоторой достаточно большой их окрестностью по фазовой переменной* x*. Существование такой области обеспечивает условие* **B**.

Пусть некоторый компакт $M \subset \mathbb{R}^n$ – целевое множество для системы (1).

Прежде чем приступить к постановке и обсуждению задач, относящихся к сближению системы (1) с M, оговорим *информационные условия*, в рамках которых осуществляется управление системой (1).

Во-первых, в начальный момент времени t_0 лицу, управляющему системой (1), неизвестно то значение $\alpha \in \mathscr{L}$, которое присутствует в системе (1); ему известно лишь само ограничение $\mathscr{L}$.

Во-вторых, можно измерять фазовую переменную $x(t)$ лишь с погрешностью, не превосходящей δ, т.е.

$$\|x^*(t) - x(t)\| \leqslant \delta, \tag{2}$$

где $x^*(t)$ – результат измерения $x(t)$. В частности, вместо начального состояния $x(t_0) = x^{(0)}$ известно лищь его приближенное значение $x^*(t_0)$, такое что $\|x^*(t_0) - x(t_0)\| \leqslant \delta$.

Тем самым мы оговорили информационные условия.

Задачу о сближении с целевым множеством M для системы (1) можно решать поэтапно, путем решения следующих двух задач.

Задача 1. *Требуется приближенно выделить присутствующее в системе* (1) *значение* $\alpha \in \mathscr{L}$.

Задача 2. *Требуется сконструировать программное управление, переводящее движение* $x(t)$ *системы* (1) *в малую окрестность целевого множества* M *в момент времени* $t = \vartheta$.

Задачу 2 можно решать, применяя стандартные методы (например, пиксельные методы [5] конструирования и представления множеств разрешимости задачи о сближении, метод экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [6, 7]) и используя приближенно восстановленное значение параметра. Оценка возникающей при этом дополнительной погрешности выполнена в работе [8]. В связи с этим здесь рассмотрим только решение задачи 1.

3. Алгоритмы восстановления неопределенного постоянного параметра

Обозначим $F(t_0, x^*(0), u_*) = \{f(t_0, x^*(0), u_*, \alpha) : \alpha \in \mathscr{L}\}$.

3.1. Алгоритм на основе правой разностной производной

Пусть дополнительно к условиям **A**, **B** выполняется следующее условие.

C1. Существует однозначное отображение $\alpha(\cdot) : F(t_0, x^*(0), u_*) \mapsto \mathscr{L}$ и функция $\varkappa(\alpha) \downarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$ такие, что

$$f(t_0, x^*(0), u_*, \alpha(f^0)) = f^0, \quad (t_0, x^*(0), u_*) \in \Omega \times P, \quad f^0 \in F(t_0, x^*(0), u_*);$$

$$\|\alpha(f_*) - \alpha(f^*)\| \leqslant \varkappa(\|f_* - f^*\|), \quad f_*, f^* \in F(t_0, x^*(0), u_*),$$

для любого $x^*(0)$ из окрестности $x^{(0)}$.

Алгоритм 1. *1) Вычисляем* $\Delta = \operatorname{argmin}\Big\{\omega^{(1)}(\Delta) + LK\Delta) + \dfrac{2\delta}{\Delta}\Big\}$.

2) Измеряем начальное состояние $x(t_0)$ *с погрешностью, непревосходящей* δ. *Результат измерения обозначим через* $x^*(t_0)$.

3) На промежутке $[t_0, t_0 + \Delta]$ *воздействуем на систему пробным управляющим вектором* u_*, *для которого выполняется условие* **C1**.

4) В момент времени $t = t_0 + \Delta$ *получаем* $x^*(t_0 + \Delta)$ *– результат измерения* $x(t_0 + \Delta)$.

5) Вычисляем вектор $f = \dfrac{x^*(t_0 + \Delta) - x^*(t_0)}{\Delta}$ *и его проекцию* f^0 *на множество* $F(t_0, x^*(t_0), u_*)$. *Если в* $F(t_0, x^*(t_0), u_*)$ *существует несколько ближайших точек к* f, *то выбираем любую.*

6) Приближенное значение искомого параметра α *находим из уравнения*

$$f(t_0, x^*(t_0), u_*, \alpha^*) = f^0.$$

В работе [9] доказано, что алгоритм 1 восстанавливает неопределенный параметр α с погрешностью

$$\|\alpha^* - \alpha\| \leqslant \varkappa\Big(2\omega^{(1)}(\Delta) + 2LK\Delta + \frac{4\delta}{\Delta}\Big),$$

где $K = \max\{\|f(t, x, u, \alpha)\| : (t, x) \in \Omega, u \in P, \alpha \in \mathscr{L}\}$.

3.2. Алгоритм на основе центральной разностной производной

Пусть при любых фиксированных $\alpha \in \mathscr{L}$ и $u \in P$ функция $f(\cdot, \cdot, u, \alpha) \in C^2(\Omega)$; выполняется следующее дополнительное условие.

C2. Существует однозначное отображение $\alpha(\cdot) : F(t_0 + \Delta/2, x^*(t_0 + \Delta/2), u_*) \mapsto \mathscr{L}$ и функция $\varkappa(\alpha) \downarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$ такие, что

$$\begin{gathered} f(t_0 + \Delta/2, x^*(t_0 + \Delta/2), u_*, \alpha(f^0)) = f^0, \\ (t_+\Delta/2, x^*(t_0 + \Delta/2), u_*) \in \Omega \times P, \quad f^0 \in F(t_0 + \Delta/2, x^*(t_0 + \Delta/2), u_*), \\ \|\alpha(f_*) - \alpha(f^*)\| \leqslant \varkappa(\|f_* - f^*\|), \quad f_*, f^* \in F(t_0 + \Delta/2, x^*(t_0 + \Delta/2), u_*). \end{gathered}$$

Алгоритм 2. *1) Вычисляем постоянную* K_2 *как оценку сверху величины* $\max\limits_{(t,x)\in\Omega, u\in P, \alpha\in\mathscr{L}} \Big\|\dfrac{\partial^2 f}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} f\Big\|$, *где* $\varphi = \dfrac{\partial f}{\partial x} f$; *вычисляем* $\Delta = 2\sqrt[4]{\dfrac{\delta}{K_2}}$ *(если это значение слишком велико, то выбираем* Δ *поменьше).*

2) Измеряем начальное состояние $x(t_0)$ *с погрешностью, непревосходящей* δ. *Результат измерения обозначим через* $x^*(t_0)$.

3) На промежутке $[t_0, t_0 + \Delta]$ *воздействуем на систему пробным управляющим вектором* u_*, *для которого выполняется условие* **C2**.

4) Получаем $x^*(t_0 + \Delta/2)$ *и* $x^*(t_0 + \Delta)$ *– результаты измерений* $x(t_0 + \Delta/2)$ *и* $x(t_0 + \Delta)$ *с погрешностью, непревосходящей* δ.

5) Вычисляем вектор $f = \dfrac{x^*(t_0 + \Delta) - x^*(t_0)}{\Delta}$ *и его (любую) проекцию* f^0 *на множество* $F^{(u_*)}(t_0 + \Delta/2, x^*(t_0 + \Delta/2)) = \{f(t_0 + \Delta/2, x^*(t_0 + \Delta/2), u_*, \alpha) : \alpha \in \mathscr{L}\}$.

6) Приближенное значение искомого параметра α *находим из уравнения*

$$f(t_0 + \Delta/2, x^*(t_0 + \Delta/2), u_*, \alpha^*) = f^0.$$

В работе [10] доказано, что для восстановленного по алгоритму 2 значения α^* параметра α выполняется оценка

$$\|\alpha^* - \alpha\| \leqslant \varkappa\Big((1+L)\delta + \frac{4\delta}{\Delta} + \frac{\Delta^3 K_2}{12}\Big).$$

3.3. Алгоритм на основе линейной интерполяции

Предположим теперь, что α – скалярный параметр из отрезка $\mathscr{L} = [a, b]$.

Пусть дополнительно к условиям **A**, **B** выполняется следующее условие.

C3. Вектор-функция $f(t, x, u, \alpha)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по α в области $\mathscr{L}$ при любых фиксированный $(t, x, u) \in \Omega \times P$. При этом существуют постоянные $m_1 > 0$ и $m_2 \geqslant 0$, для которых всюду в $\Omega \times P \times \mathscr{L}$ выполнены неравенства

$$\left\|\frac{\partial f(t, x, u, \alpha)}{\partial \alpha}\right\| \geqslant m_1, \qquad \left\|\frac{\partial^2 f(t, x, u, \alpha)}{\partial \alpha^2}\right\| \leqslant m_2.$$

Алгоритм 3. *1) Вычисляем постоянные m_1 и m_2.*

2) Учитывая ценку погрешности (приведенную ниже), выбираем пробный управляющий вектор u_* (для которого выполняется условие **C3***), длительность его действия Δ, натуральные числа N и N_t.*

3) Обозначим через $\Delta_t = \Delta/N$, $\Delta_\alpha = (b-a)/N$ и введем равномерные разбиения $\Gamma_t = \{\tau_0 = t_0, \tau_1 = t_0 + \Delta_t, ..., \tau_{N_t} = \Delta\}$, $\Gamma = \{\alpha_0 = a, \alpha_1 = a + \Delta_\alpha, ..., \alpha_k = a + k\Delta_\alpha, ..., \alpha_N = b\}$.

4) Измеряем начальное состояние $x(t_0)$ с погрешностью, непревосходящей δ. Результат измерения обозначим через $x^*(t_0)$.

5) Для каждого $\alpha^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$, вычисляем методом Эйлера с шагом $\Delta_t = \Delta/N_t$ прогнозную траекторию $\hat{x}^{(k)}(t)$ как решение начальной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}^{(k)}(t)}{dt}(t) = f(t, \hat{x}^{(k)}(t), u_*, \alpha^{(k)}), \quad t \in (t_0, t_0 + \Delta), \\ \hat{x}^{(k)}(t_0) = x^*(t_0). \end{cases}$$

Запоминаем значения $\hat{x}^{||(k)}(t_0 + \Delta)$, $k = \overline{1, N}$. Погрешногсть метода Эйлера обозначим через $r(\Delta_t) = \max\limits_k ||\hat{x}^{(k)}(t_0 + \Delta) - x^{(k)}(t_0 + \Delta)||$, где $x^{(k)}(t_0 + \Delta)$ – точное состояние системы в момент $t = t_0 + \Delta$, соответствующее начальному состоянию $x^{(0)}$ и параметру $\alpha = \alpha^{(k)}$.

6) На промежутке времени $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ воздействуем на систему ранее выбранным пробным управляющим вектором u_*.

7) Получаем измерение $x^*(t_0 + \Delta)$ фазовой переменной $x(t_0 + \Delta)$.

8) Находим проекцию $\overline{x}(t_0 + \Delta)$ на ближайший отрезок $[\hat{x}_j(t_0 + \Delta), \hat{x}_{j+1}(t_0 + \Delta)]$ из множества отрезков $[\hat{x}_k(t_0 + \Delta), \hat{x}_{k+1}(t_0 + \Delta)]$, $k = \overline{0, N-1}$.

9) Вычисляем приближенное значение искоого параметра α по формуле

$$\alpha^* = \frac{\|\overline{x}(t_0 + \Delta) - \hat{x}_{j+1}(t_0 + \Delta)\|}{\|\hat{x}_{j+1}(t_0 + \Delta) - \hat{x}_j(t_0 + \Delta)\|}\alpha^{(j)} + \frac{\|\overline{x}(t_0 + \Delta) - \hat{x}_j(t_0 + \Delta)\|}{\|\hat{x}_{j+1}(t_0 + \Delta) - \hat{x}_j(t_0 + \Delta)\|}\alpha^{(j+1)}.$$

Используя [11, лемма 1], можно доказать, что в этом случае

$$\|\alpha^* - \alpha\| \leqslant \frac{1}{m_1 \Delta}\bigg(\Big(\frac{3}{8} m_2 \Delta_\alpha^2 + \delta\Big)\Big(1 + \frac{r(\Delta_t)\sqrt{2}}{\Delta_\alpha}\Big) + r(\Delta_t)\bigg).$$

4. Заключение

Использование пробного управления для восстановления неопределенного постоянного параметра требует не только высокой точности, но и максимального быстродействия для скорейшего перехода к так называемому «активному управлению». Быстродействие может быть обеспечено прежде всего уменьшением времени действия пробного управляющего вектора. Неявным дополнительным ограничением для решения задач управления в режиме реального времени является невозможность применения чрезмерно «тяжелых» вычислительных процедур. Наиболее перспективными выглядят алгоритмы, основанные на линейной интерполяции. Дальнейшие исследования могут быть посвящены разработке новых алгоритмов на основе линейной и нелинейной интерполяции, которые восстанавливают неопределенные векторные параметры. Тем не менее, алгоритм на основе правой разностной производной остается актуальным при решении практических задач управления за счет его применимости к системам самого общего вида с минимальными условиями на гладкость правой части.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00217, https://rscf.ru/project/24-11-00217/.

Список литературы

1. Сапожников А.В. Управление техническими объектами в условиях параметрической неопределенности // Молодой ученый. 2014. № 6 (65). С. 2239–231.
2. Никольский М.С. Об одной задаче управления с неполностью известным начальным условием // Прикл. матем. и информ. 2016. Т. 51. С. 16–23.
3. Брессан А., Пикколи Б. Введение в математическую теорию управления. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2015. 386 с.
4. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука. 1968. 576 с.
5. Новикова А.О. *Построение множеств достижимости двумерных нелинейных управляемых систем пиксельным методом* // Труды «Прикладная математика и информатика». 2015. Т. 50. С. 62–82.
6. Лемак С.С. К вопросу о формировании позиционных стратегий дифференциальной игры в методе экстремального прицеливания Н.Н. Красовского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2015. № 6. С. 61–65.
7. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Паршиков Г.В. Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 275–284.
8. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 9. С. 56–99.
9. Ushakov V.N., Ershov A.A., Ushakov A.V. An Approach Problem with an Unknown Parameter and Inaccurately Measured Motion of the System // IFAC-Papers-OnLine. 2018. Vol. 51, No. 32. P. 234–238.
10. Ушаков В.Н., Ершов А.А. О восстановлении неопределенного постоянного параметра несколькими пробными управлениями // Уфимск. матем. журн. 2020. Т. 12, № 4. С. 101–116.
11. Ushakov V.N., Ershov A.A., Ershova A.A., Alekseev A.V. Linear Interpolation of Program Control with Respect to a Multidimensional Parameter in the Convergence Problem // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. MOTOR 2023. Communications in Computer and Information Science. 2023. Vol. 1881. P. 324-337.