УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СЕТЕВОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ ПОВЕДЕНИЯ ИГРОКОВ

Л.А. Петросян
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
E-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Я.Б. Панкратова
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9
E-mail: y.pankratova@spbu.ru

Ключевые слова: вектор Шепли, дифференциальная сетевая игра, C-ядро.

Аннотация: в работе рассмотрена версия сетевой дифференциальной игры, учитывающая наличие игроков с различными типами поведения. Предложен конструктивный подход построения принципов оптимальности и показана, в ряде случаев, их непустота. В качестве принципов оптимальности предлагается C-ядро, существование которого доказано, а также вектор Шепли.

1. Введение

Сетевые игры являются актуальным разделом современной теории игр (см. [2, 3, 5-9]). Данное исследование является продолжением серии работ по кооперативным дифференциальным играм на сетях и, в частности, работ [4, 11, 12]. Предполагается, что любой из участников игрового процесса в любой момент времени может разорвать связи между собой и другими участниками. С учетом неотрицательности выигрышей игроков, такое предположение значительно упрощает построение характеристической функции игры и как следствие вычисление основанных на ней принципов оптимальности кооперативной теории. В данной работе мы дополнительно предполагаем, что игроки изначально выбрали один из трех возможных типов поведения: участвовать в кооперации (здесь под кооперацией мы понимаем согласованные действия игроков направленные на достижение максимального суммарного выигрыша и дальнейшего его перераспределения между участниками кооперации в соответствии с некоторыми принципами), действовать индивидуально в собственных интересах, и не зависимо от сложившейся ситуации, следовать некоторой фиксированной стратегии (безразличные игроки). Идея такого подхода в случае классической однократной кооперативной игры была предложена в работе [1].

2. Кооперативная дифференциальная игра на сети

2.1. Дифференциальная игра на сети

Пусть S – множество кооперирующихся игроков, M – множество игроков, действующих индивидуально в собственных интересах и L – множество безразличных игроков.

Рассматривается дифференциальная игра -лиц с предписанной продолжительностью $T - t_0$. Обозначим через $N = \{1,2,\ldots,n\}$ множество игроков на сети, которое совпадает с множеством узлов сети. Множество всех ребер сети обозначим через $P, P = \{arc(i,j)\ i,j \in N, i \neq j\}$. Для удобства, обозначим множество игроков, связанных с игроком i ребром, через $\widetilde{K}(i) = \{j: arc(i,j) \in P\}$, для $i \in N$.

Обозначим через $x^i(\tau) \in R^m$ фазовое состояние игрока $i \in N$ в момент времени τ и $u^i(\tau) \in U^i \subset R^k$, $U^i \in CompR^k$ управляющее воздействие игрока $i \in N$.

Динамику игры определим следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^i, u^i), i \in S \cup M, x^i(t_0) = x_0^i.$$

$$\dot{x}^i = f^i(x^i, \tilde{u}^i), i \in N \backslash S \cup M = L, x^i(t_0) = x_0^i.$$

Функции $\boldsymbol{f^i}$ $(\boldsymbol{x^i}, \boldsymbol{u^i})$ непрерывны и дифференцируемы по $\boldsymbol{x^i}$ и $\boldsymbol{u^i}$

Заметим, что во втором случае управления предполагаются предписанными заранее.

Выигрыш игрока i определяется как

$$H_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^1, \ldots, u^n) = \sum_{j \in \widetilde{K}(i)} \int_{t_0}^{T} h_i^j\left(x^i(\tau), x^j(\tau)\right) d\tau,$$

где величина $h_i^j\left(x^i(\tau), x^j(\tau)\right)$ представляет собой мгновенный выигрыш, который игрок i может получить через сетевое взаимодействие с игроком $j \in \widetilde{K}(i)$ (заметим, что пара $(i,i) \notin P$). Функции $h_i^j\left(x^i(\tau), x^j(\tau)\right)$ для всех $j \in \widetilde{K}(i)$ предполагаются неотрицательными. Для удобства обозначим через $x(t)$ вектор $(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$.

2.1. Кооперация игроков в игре.

Как было отмечено ранее, предполагается, что множество игроков разбито на три не пересекающиеся подмножества ($N = S \cup M \cup L$):

1. Множество S (коалиция) состоит из игроков, стремящихся к кооперации с точки зрения максимизации суммарного выигрыша и последующего его перераспределения между кооперирующимися игроками в соответствии с некоторыми принципами оптимальности.
2. Множество M состоит из игроков действующих индивидуально с целью максимизации собственного выигрыша.
3. Множество L состоит изигроков, выбравших некоторую заранее фиксированное программное управление и безразличных к поведению других игроков, а следовательно, и выигрышу.

Рассмотрим вспомогательную дифференциальную сетевую игру $n - s + 1$ лиц ($s = |S|$) между коалицией S, действующей как один игрок с выигрышем $H_S = \sum_{i \in S} H_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^1, \ldots, u^n)$, и игроками $j \in M \cup L$ с выигрышами $H_j(x_1^0, \ldots, x_n^0, u^1, \ldots, u^n)$ (управления игроков из множества L фиксированы и равны $\tilde{u}^i$ как и соответствующие траектории $\tilde{x}^i(\tau)$, $i \in L$, $\tau \in [t_0, T]$). Предположим, что в рассматриваемой вспомогательной игре существует равновесие по Нэшу в позиционных стратегиях и обозначим эту ситуацию

$$((u^S)^*, (u^1)^*, \ldots, \left(u^i\right)^*, \ldots, (u^m)^*, (\tilde{u}^1), \ldots, (\tilde{u}^l))$$

(очевидно, что стратегии безразличных игроков также будут входить в эту ситуацию).

Здесь $m=|M|$, $l=|L|$ и $u^S=\{u^k, k\in S\}$. Обозначим через $V(S)$ суммарный выигрыш игроков из коалиции S в этой ситуации

$$V(S)=\sum_{i\in S}\sum_{j\in S\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_j^i\left(x^{*i}(\tau),x^{*j}(\tau)\right)d\tau+\sum_{i\in S}\sum_{j\in M\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h^i(x^{*i}(\tau),x^{*j}(\tau))d\tau$$
$$+\sum_{i\in S}\sum_{j\in L\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_j^i(x^{*i}(\tau),\tilde{x}^{*j}(\tau))d\tau$$

Из определения видно, что при взаимодействии с игроками из множества L игроки из S предполагают использование игроками из L фиксированных управлений $\tilde{u}^i$, $i\in L$. Нас будут интересовать значения характеристической функции только на подмножествах множества $S\subset N$.

Определим эти значения следующим образом. Значения характеристической функции для подмножеств $A, A\subset S$ полагаем равным

$$V(A)=\sum_{i\in A}\sum_{j\in A\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_j^i\left(x^{*i}(\tau),x^{*j}(\tau)\right)d\tau+$$
$$+\sum_{i\in A}\sum_{j\in M\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_j^i\left(x^{*i}(\tau),x^{*j}(\tau)\right)d\tau+$$
$$+\sum_{i\in A}\sum_{j\in L\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_j^i\left(x^{*i}(\tau),\tilde{x}^{*j}(\tau)\right)d\tau.$$

Как видно из предыдущей формулы сумма, определяющая значение характеристической функции состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое соответствует суммарному выигрышу игроков из A, имеющих связи друг с другом при использовании стратегий, соответствующих вышеописанной ситуации равновесия по Нэшу. Второе слагаемое – это суммарный выигрыш игроков из A, получаемый при взаимодействии с игроками из коалиции M. Третье слагаемое соответствует суммарному выигрышу игроков из A при взаимодействии с безразличными игроками из коалиции L. Заметим, что в выражение (1) не входят выигрыши игроков из A от взаимодействия с игроками из $S\backslash A$, поскольку по определению $V(A)$ есть гарантированный выигрыш коалиции A при наихудшем поведении игроков из $S\backslash A$. Поскольку наихудшим поведением является прекращение взаимодействия с игроками из A, то соответствующие выигрыши равны нулю.

Можно доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. *Игра с характеристической функцией $V(A)$ выпукла.*

Утверждение 2. *Вектор выигрышей игроков из S при кооперации*

$$\overline{H}_i=\sum_{j\in S\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_j^i\left(x^{*i}(\tau),x^{*j}(\tau)\right)d\tau+\sum_{j\in M\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_j^i(x^{*i}(\tau),x^{*j}(\tau))d\tau+$$
$$+\sum_{j\in L\cap\tilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_j^i(x^{*i}(\tau),\tilde{x}^{*j}(\tau))d\tau\,, i=1,\dots,s$$

принадлежит ядру игры с характеристической функцией $V(A)$.

Утверждение 3. *Вектор Шепли состоятелен во времени (динамически устойчив [10]).*

Заметим, что равновесий по Нэшу может быть много. Отметим один особый случай, когда в равновесии по Нэшу достигается максимальный суммарный выигрыш игроков $j\in S\cup M$. Такое равновесие в ряде случаев может быть построено в классе так называемых стратегий наказания (или «триггерных» стратегий). Тогда набор траекторий $x^{*i}(\tau)$, $i \in S \cup M$ будут совпадать с кооперативными траекториями максимизирующими суммарный выигрыш игроков из множеств $S \cup M$. В этом случае вся конструкция нахождения решения существенно упрощается, и вместо нахождения равновесий по Нэшу в игре с игроками $S, j \in M$, $i \in L$достаточно повести одну операцию максимизации

$$V(N) = \max_{u_i, i \in S \cup M} \sum_{i \in S} \sum_{j \in (M \cup S) \cap \bar{K}(i)} \int_{t_0}^{T} h_j^i \left(x^i(\tau), x^j(\tau)\right) d\tau + \sum_{i \in S} \sum_{j \in L \cap \bar{K}(i)} \int_{t_0}^{T} h_j^i (x^i(\tau), \tilde{x}^j(\tau)) d\tau +$$

$$+ \sum_{i \in S} \sum_{j \in (M \cup S) \cap \bar{K}(i)} \int_{t_0}^{T} h_j^i \left(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)\right) d\tau + \sum_{i \in S} \sum_{j \in L \cap \bar{K}(i)} \int_{t_0}^{T} h_j^i (\bar{x}^i(\tau), \tilde{x}^j(\tau)) d\tau,$$

и тогда для вычисления $V(A)$ для $A \subset S$ получаем формулу

$$V(A) = \sum_{i \in A} \sum_{j \in A \cap \bar{K}(i)} \int_{t_0}^{T} h_j^i \left(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)\right) d\tau +$$

$$+ \sum_{i \in A} \sum_{j \in M \cap \bar{K}(i)} \int_{t_0}^{T} h_j^i \left(\bar{x}^i(\tau), \bar{x}^j(\tau)\right) d\tau + \sum_{i \in A} \sum_{j \in L \cap \bar{K}(i)} \int_{t_0}^{T} h_j^i (\bar{x}^i, \tilde{x}^j(\tau)) d\tau.$$

В этой формуле вместо равновесных по Нэшу траекторий $x^*(t)$, стоят кооперативные траектории $\bar{x}(t)$, полученные в результате одной процедуры максимизации, определенной выше. Таким образом, в этом особом случае оказывается, что реализация принципов оптимальности (С-ядра или вектора Шепли), основанных на построении характеристической функции на множестве S, не требует нахождения равновесий по Нэшу или вычисления минимаксов, что является практически неразрешимой проблемой в теории дифференциальных игр.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда №22-11-00051

3. Заключение

В работе рассмотрена кооперативная дифференциальная игра на сети, в которой игроки следуют различным типам поведения (вступать в кооперацию, действовать индивидуально в своих интересах, или использовать некоторый предписанный вид поведения). В такой игре предложен новый тип характеристической функции и построены С-ядро и вектор Шепли, изучены их свойства.

Список литературы

1. Bilbao J.M., et al. Bicooperative games // Cooperative games on combinatorial structures. Kluwer Acad., 2000, C. 131-295.
2. Bulgakova M, Petrosyan,L. About one multistage non-antagonistic network game // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Prikladnaya Matematika, Informatika, Protsessy Upravleniya. 2019. Vol. 15. P. 603-615.
3. Cao H., Ertin E., Arora A. MiniMax equilibrium of networked differential games // ACM Transactions on Autonomous and Adaptive Systems. 1963. Vol. 3. P. 1-21.
4. Тур А.В., Петросян Л. А. Кооперативные принципы оптимальности в дифференциальных играх на сетях // МТИП. 2020. Т. 12, № 4. С. 93-111.
5. Jackson M.O. Social and Economic Networks. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008.
6. Mazalov V, Chirkova J. Networking Games: Network Forming Games and Gameson Networks. Academic Press, 2019.
7. Meza M.A.G., Lopez-Barrientos J.D. A differential game of a duopoly with network externalities // Recent Advances in Game Theory and Applications // Static Dyn. Game Theory Found. Appl. Cham: Springer/Birkh ̈auser, 2016. 49-66.

8. Pai H.M. A differential game formulation of a controlled network // Queueing Systems: Theory and Applications Archive. 2010. Vol. 64. P. 325-358.
9. Petrosyan L.A. Cooperative differential games on networks // Trudy Inst. Mat. I Mekh. UrO RAN. 2010. Vol. 16, No. 5. P. 143-150. (in Russian)
10. Petrosyan L., Zaccour G. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction // J. Economic Dynamics and Control. 2003. Vol. 27. P. 381-398.
11. Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Y. Cooperative Differential Games with Partner Sets on Networks // Trudy Instituta Matematikii Mekhaniki UrO RAN. 2021. Vol. 27, No. 3. P. 286-295. DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-3-286-295.
12. Petrosyan L., Yeung D., Pankratova Y. Characteristic functions in cooperative differential games on networks // Journal of Dynamics and Games, 2023, DOI: 10.3934/jdg.2023017