УДК 519.833.2

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ИГРЫ

А.Н. Реттиева
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН,
Санкт-Петербургский государственный университет
Россия, 185910, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11,
Россия,199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
E-mail: annaret@krc.karelia.ru

Ключевые слова: динамические игры, асимметричные игроки, многокритериальные игры, кооперативное равновесие, арбитражная схема.

Аннотация: Предложены концепции определения оптимального поведения в несимметричных многокритериальных динамических играх. Некооперативное равновесие построено с использованием арбитражной схемы. Для определения кооперативного поведения разработан подход, гарантирующий выполнение условий индивидуальной рациональности. Принцип динамической устойчивости адаптирован для многокритериальных динамических игр и построена динамически устойчивая процедура распределения выигрыша.

1. Введение

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов [5], наиболее приближены к реальности. Зачастую игроки хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть несравнимы. Такие ситуации нередко встречаются в экономических и экологических моделях.

В работах [2, 3] для динамических многокритериальных игр были формализованы понятия равновесий с использованием модифицированных арбитражных схем. В [4] был разработан новый подход к определению кооперативного поведения, гарантирующий выполнение условий индивидуальной рациональности. В данной работе предложенные методы используются для построения равновесий в многокритериальных динамических играх с несимметричными участниками.

Для стабилизации кооперативного решения классический принцип динамической устойчивости [1] адаптирован для многокритериальных динамических игр. В явном виде построена динамически устойчивая процедура распределения выигрыша.

Исследована динамическая бикритериальная задача управления ресурсами с несимметричными участниками. Построены некооперативное и рациональное кооперативное равновесия, а также динамически устойчивая процедура распределения выигрыша. Проведено сравнение состояния эксплуатируемого ресурса и выигрышей игроков. Показано, что предложенный подход стимулирует кооперативное поведение.

2. Многокритериальная динамическая игра

Рассмотрим многокритериальную динамическую игру, в которой n игроков эксплуатируют общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть k различных целей. При этом участники используют различные коэффициенты дисконтирования, что можно интерпретировать как их различные предпочтения во времени. Динамика развития возобновляемого ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \ldots, u_{nt})\,,\ x_1 = x\,,\ t = 1, \ldots, m\,, \tag{1}$$

где $x_t \geqslant 0$ – размер эксплуатируемого ресурса в момент времени t, $f(x_t, u_{1t}, \ldots, u_{nt})$ – функция развития возобновляемого ресурса, $u_{it} \geqslant 0$ – стратегия (интенсивность эксплуатации) игрока i в момент времени t, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.

Вектор-функции выигрышей игроков на конечном промежутке планирования $[1, m]$ представлены как

$$J_i(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = \begin{pmatrix} J_i^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = \sum\limits_{t=1}^{m} \delta_i^t g_i^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) \\ \ldots \\ J_i^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = \sum\limits_{t=1}^{m} \delta_i^t g_i^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) \end{pmatrix}, \ i \in N\,, \tag{2}$$

где $g_i^j(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) \geqslant 0$ – функции «мгновенного» выигрыша, $j = 1, \ldots, k$, $i \in N$, $\delta_i \in (0, 1)$ – коэффициент дисконтирования игрока i, $i \in N = \{1, \ldots, n\}$.

2.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Для определения некооперативного поведения в многокритериальной динамической игре применяется конструкция арбитражной схемы Нэша [2]. При этом функции выигрыша строятся как произведения Нэша, где гарантированные выигрыши играют роль точек статус-кво:

$$H_1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = (J_1^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - G_1^1) \cdot \ldots \cdot (J_1^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - G_1^k)\,,$$
$$\ldots\,,$$
$$H_n(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) = (J_n^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - G_n^1) \cdot \ldots \cdot (J_n^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - G_n^k)\,,$$

где G_i^j – гарантированные выигрыши, определенные одним из способов, предложенных в [2], $i \in N$, $j = 1, \ldots, k$.

Определение 1. *Профиль стратегий* $u_t^N = (u_{1t}^N, \ldots, u_{nt}^N)$ *называется многокритериальным равновесием по Нэшу [2] в игре* (1), (2), *если*

$$H_i(u_{1t}^N, \ldots, u_{nt}^N) \geqslant H_i(u_{1t}^N, \ldots, u_{i-1t}^N, u_{it}, u_{i+1t}^N, \ldots, u_{nt}^N)\ \forall u_{it} \in U_i\,,\ i \in N\,. \tag{3}$$

Следовательно, как и в классическом равновесии по Нэшу игрокам не выгодно отклоняться от равновесных стратегий. При этом каждый игрок стремится максимизировать произведение расстояний до гарантированных выигрышей.

2.2. Многокритериальное кооперативное равновесие

Многокритериальное кооперативное равновесие было получено как решение арбитражной схемы в [3]. А именно, в соответствии с этим подходом, для определения кооперативного поведения использовалось произведение расстояний от суммы выигрышей игроков до суммы некооперативных выигрышей по всем критериям. Поскольку представленная схема не гарантирует выполнение условий индивидуальной рациональности, что является ключевым моментом для поддержания кооперативного поведения, был разработан новый подход к определению кооперативных стратегий в динамической многокритериальной игре [4].

Для определения кооперативного поведения используется модифицированная арбитражная схема. При этом в качестве точек статус-кво выступают некооперативные выигрыши, полученные игроками при использовании многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий u_{it}^N, $i \in N$ (3). Для построения кооперативных стратегий и выигрышей игроков решается следующая задача:

$$\begin{aligned}
&(V_1^{1c} - J_1^{1N}) \cdot \ldots \cdot (V_1^{kc} - J_1^{kN}) + \ldots + (V_n^{1c} - J_n^{1N}) \cdot \ldots \cdot (V_n^{kc} - J_n^{kN}) = \\
&= (\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t g_1^1(u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c) - J_1^{1N}) \cdot \ldots \cdot (\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t g_1^k(u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c) - J_1^{kN}) + \ldots + \\
&+ (\sum_{t=1}^{m} \delta_n^t g_n^1(u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c) - J_n^{1N}) \cdot \ldots \cdot (\sum_{t=1}^{m} \delta_n^t g_n^k(u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c) - J_n^{kN}) = \\
&= \max_{u_{1t}, \ldots, u_{nt} \geqslant 0} \Big[(\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t g_1^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - J_1^{1N}) \cdot \ldots \\
&\cdot (\sum_{t=1}^{m} \delta_1^t g_1^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - J_1^{kN}) + \ldots + (\sum_{t=1}^{m} \delta_n^t g_n^1(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - J_n^{1N}) \cdot \ldots \\
&\cdot (\sum_{t=1}^{m} \delta_n^t g_n^k(u_{1t}, \ldots, u_{nt}) - J_n^{kN}) \Big],
\end{aligned} \tag{4}$$

где $J_i^{jN} = J_i^j(u_{1t}^N, \ldots, u_{nt}^N)$ – выигрыши в многокритериальном равновесии по Нэшу, $i \in N$, $j = 1, \ldots, k$.

Определение 2. *Профиль стратегий* $u_t^c = (u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c)$ *называется рациональным многокритериальным кооперативным равновесием [4] в игре* (1), (2), *если является решением задачи* (4).

Эта концепция решения гарантирует рациональность кооперативного поведения, поскольку кооперативные выигрыши игроков больше или равны многокритериальным некооперативным выигрышам. Более того, этот подход более похож на классическое определение кооперативного поведения, поскольку игроки стремятся максимизировать сумму своих индивидуальных выигрышей. Цель каждого игрока состоит в том, чтобы максимально отдалиться от некооперативных выигрышей, и при кооперации игроки предпочитают делать это совместно.

2.3. Динамическая устойчивость

Как легко видеть, предложенный подход определения кооперативного поведения не требует распределения общего кооперативного выигрыша между участниками.

Следовательно, не требуется построения ни характеристической функции, ни дележа, и кооперативные выигрыши игроков для всей игры могут быть вычислены в следующей форме:

$$J_i^c(1,x) = \begin{pmatrix} J_i^{1c}(1,x) = \sum\limits_{t=1}^{m} \delta_i^t g_i^1(x_t^c, u_{it}^c, \ldots, u_{nt}^c) \\ \ldots \\ J_i^{kc}(1,x) = \sum\limits_{t=1}^{m} \delta_i^t g_i^k(x_t^c, u_{it}^c, \ldots, u_{nt}^c) \end{pmatrix}, \ i \in N, \tag{5}$$

где $u_t^c = (u_{1t}^c, \ldots, u_{nt}^c)$ – кооперативные стратегии, полученные в (4).

Аналогично определяются кооперативные выигрыши $J_i^c(t, x_t^c)$, $i = 1, \ldots, n$, $t \in [2, m]$, для каждой подыгры, начинающийся из состояния x_t^c в момент времени t.

Для стабилизации кооперативного решения в многокритериальной динамической игре адаптируем состоятельную во времени процедуру распределения дележа [1]. Основная идея этой схемы – распределить кооперативный выигрыш по всему периоду продолжения игры. Динамическая устойчивость (состоятельность во времени) гарантирует, что участники, придерживающиеся кооперативной траектории, руководствуются одним и тем же подходом к определению оптимального поведения (4) в каждый момент времени и, следовательно, не имеют стимулов отклоняться от кооперации.

Выплата агенту i, $i \in N$, по всем критериям в момент времени t строится в соответствии со следующими определениями.

Определение 3. *Вектор*

$$\beta(t, x_t) = (\beta_1(t, x_t), \ldots, \beta_n(t, x_t)),$$

где

$$\beta_i(t, x_t) = \begin{pmatrix} \beta_i^1(t, x_t) \\ \ldots \\ \beta_i^k(t, x_t) \end{pmatrix}, \ i \in N, \ t \in [1, m],$$

является процедурой распределения выигрыша в несимметричной динамической многокритериальной игре (1), (2), *если*

$$J_i^{jc}(1,x) = \sum_{t=1}^{m} \delta_i^t \beta_i^j(t, x_t), \ i \in N, \ j = 1, \ldots, k. \tag{6}$$

Определение 4. *Вектор* $\beta(t, x_t) = (\beta_1(t, x_t), \ldots, \beta_n(t, x_t))$ *является динамически устойчивой процедурой распределения выигрыша в несимметричной динамической многокритериальной игре* (1), (2), *если в каждый момент времени* $t \in [1, m]$

$$J_i^{jc}(1,x) = \sum_{l=1}^{t} \delta_i^l \beta_i^j(l, x_l) + J_i^{jc}(t+1, x_{t+1}), \ i \in N, \ j = 1, \ldots, k. \tag{7}$$

Теорема 1. *Вектор* $\beta(t, x_t) = (\beta_1(t, x_t), \ldots, \beta_n(t, x_t))$, *где*

$$\beta_i(t, x_t) = J_i^c(t, x_t) - \delta_i J_i^c(t+1, x_{t+1}), \ i \in N, \ t \in [1, m], \tag{8}$$

является динамически устойчивой процедурой распределения выигрыша в несимметричной динамической многокритериальной игре (1), (2).

Исследована динамическая бикритериальная модель управления возобновляемыми ресурсами с различными коэффициентами дисконтирования. Построены многокритериальное некооперативное и рациональное кооперативное равновесия. Для поддержания кооперативного поведения агентов определена динамически устойчивая процедура распределения выигрыша. Проведено сравнение состояния эксплуатируемого ресурса и выигрышей участников при кооперативном и некооперативном поведении. Показано, что рациональное кооперативное равновесие предпочтительнее для экологической системы и выгодно участникам.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00051, https://rscf.ru/project/22-11-00051.

Список литературы

1. Петросян Л.А. Устойчивость решений дифференциальных игр со многими участниками // Вестник Ленинградского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 1977. № 19. С. 46–52.
2. Rettieva A.N. Multicriteria dynamic games // International Game Theory Review. 2017. Vol. 1(19). P. 1750002.
3. Rettieva A.N. Rational behavior in dynamic multicriteria games // Mathematics. 2020. Vol. 8. P. 1485.
4. Rettieva A.N. Dynamic multicriteria games with asymmetric players // Journal of Global Optimization. 2022. Vol. 83. P. 521–537.
5. Shapley L.S. Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Res. Log. Quart. 1959. Vol. 6. P. 57–61.