УДК 519.834

КОАЛИЦИОННО-ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ В НЕТРАНСФЕРАБЕЛЬНОЙ ИГРЕ

В.И. Жуковский
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, ВМК
E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Л.В. Жуковская
Центральный экономико-математический институт РАН
Россия, 117418, Москва, Нахимовский пр., 47
E-mail: zhukovskaylv@mail.ru

Л.В. Смирнова
Государственный гуманитарно-технологический университет
Россия, 142611, Московская область, г. Орехово-Зуево, ул. Зеленая, 22
E-mail: smlv69@yandex.ru

Ю.С. Мухина
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, механико-математический факультет
E-mail: js.mukhina@mail.ru

С.П. Самсонов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, ВМК
E-mail: samsonov@cs.msu.ru

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, равновесие угроз и контругроз, оптимальность по Парето, коалиция

Аннотация: на основе подходящей модификации концепции равновесия по Нэшу предлагается понятие решения игры нескольких лиц с заданной коалиционной структурой и без побочных платежей.

Рассматривается нетрансферабельная игра N лиц

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \mathscr{K}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle,$$

здесь множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$ разбито на множество попарно непересекающихся подмножеств (коалиций) образующих коалиционную структуру $\mathscr{K} = \{K_1, \ldots, K_\omega\}$ (т.е. $\bigcup\limits_{i=1}^{\omega} K_i = \mathbb{N}$ и $K_i \bigcap\limits_{\substack{i,j=1;\\ i\neq j}}^{\omega} K_j = \varnothing$); игроки из каждой коалиции K_i на своих «внутрикоалиционных совещаниях» выбирают сообща свою стратегию $x_{K_i} = \{x_i \mid i \in K_i\}$ из множества $X_{K_i} = \prod\limits_{j \in K_i} X_j$, $X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$; в результате образуется *ситуация* игры Γ, именно, $x = (x_{K_i}, x_{-K_i}) \in X = \prod\limits_{j=1}^{\omega} X_j$, где $-K_i = \mathbb{N} \backslash K_i$; наконец, каждый из игроков $i \in \mathbb{N}$ «зарабатывает» свой выигрыш $f_i(x)$ – значение скалярной *функции выигрыша* i-го (с целью «заработать» возможно больший выигрыш). Общепринятым для игры Γ, где все K_i состоят лишь из одного игрока, является *равновесие по Нэшу* $x^e \in X$, определяемое системой равенств:

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x_i || x^e_{-i}) = f_i(x^e) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Однако (1) означает лишь индивидуальное стремление каждого i-го игрока к наибольшему (для себя) *выигрышу* $f_i(x)$, «забывая» даже об интересах членов своей коалиции. Избежать этот *негатив* позволяют применение эффективной ситуации, предложенной в 1909 году итальянским экономистом и социологом Вильфредо Парето: ситуация x^P, впоследствии названная *максимальной по Парето* (эффективной) в задаче Γ, если для $\forall x \in X$ несовместна система N неравенств $f_i(x) \geqslant f_i(x^P)(i \in \mathbb{N})$, из которых хотя бы одно строгое.

Максимальная по Парето ситуация обладает следующими тремя свойствами:

a) при выборе всеми игроками ситуации $\forall x \neq x^P$ найдется хотя бы одно $m \in \mathbb{N}$, при котором $f_m(x) < f_m(x^P)$;

b) если для набора чисел $\alpha_i = const > 0$ $(i \in \mathbb{N})$ будет

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x^P); \tag{2}$$

то ситуация x^P максимальна по Парето в Γ.

c) не существует ситуации $\widehat{x} \in X$ и $\widehat{x} \neq x^P$ при которой $f_i(\widehat{x}) > f_i(x^P)$ для всех $i \in \mathbb{N}$, т.е. x^P является «потолком», выше которого все выигрыши $f_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$ «подняться» не могут.

Операцию (2) обозначим (далее N-вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ и $f = (f_1, \ldots, f_N)$)

$$\underset{x \in X}{\mathrm{MAX}}^P f(x) = f(x^P) = f^P. \tag{3}$$

Игрокам любой коалиции K_l было бы желательным, чтобы вместо (1) выбираемая стратегия $\overline{x}_{K_l}$ была бы эффективной по отношению к выигрышам остальных членов их коалиции, т.е. $\overline{x}_{K_l}$ *коалиционно-оптимальна по Парето* в задаче (при «замороженных» $\overline{x}_{-K_l}$)

$$\Gamma_l = \langle K_l, \{X_i\}_{i \in K_l}, \{f_{K_l}(x_{K_l}, \overline{x}_{-K_l})\} \rangle,$$

где, напомним, вектор $f_{K_l} = \{f_i \mid i \in K_l\}$ и $-K_l = \mathbb{N} \backslash K_l$, т.е. при $\forall x_{K_l} \in X_{K_l}$ была бы несовместна система неравенств

$$f_i(x_{K_l}, \overline{x}_{-K_l}) \geqslant f_i(x^P_{K_l}, \overline{x}_{-K_l}) \quad (i \in K_l), \tag{4}$$

из которых хотя бы одно строгое. Подобное требование в такой кооперативной игре названо условием коллективной рациональности. Следуя этому назовем указанное требование (несовместимости из (4)) требованием *коалиционной рациональности.* Именно, если для каждой коалиции $K_r \in \mathscr{K}$ $(r = 1, \ldots, \omega)$ несовместна система неравенств

$$f_i(x_{K_r}, \overline{x}_{-K_r}) \geqslant f_i(x^P_{K_r}, \overline{x}_{-K_r}) \quad (i \in K_r), \tag{5}$$

из которых хотя бы одно строгое, то тогда набор стратегий $x^P_{K_r} \in X_{K_r}$ назовем *коалиционно-оптимальным по Парето* (эффективным) для членов коалиции K_r. Отметим, что требование (5) можно записать в виде

$$\operatorname*{MAX}_{x_{K_i} \in X_{K_i}}{}^{P} f_i(x_{K_r}, \overline{x}_{-K_r}) = f_i(x^P, \overline{x}_{-K_r}) \quad (i \in K_r). \tag{6}$$

Наконец, заметим, что подобное требование (эффективности) в реальных задачах явление весьма редкое. Предлагаем,

Определение 1. *Пару $(x^P, f^P) \in X \times \mathbb{R}^N$ назовем коалиционно-эффективной (КЭР) для игры Γ, если*

a) $x^P = \left(x^P_{K_l} \mid K_l \in \mathscr{K}, l = 1, \ldots, \omega\right)$ *– коалиционно–эффективна в игре Γ;*

b) соответствующий выигрыш $f^P = (f_1(x^P), \ldots, f_N(x^P)) = (f^P_1, \ldots, f^P_N) = (f^P_{K_r}, f^P_{-K_r})$, т. е. с учетом обозначений в (3)

$$f^P_{K_r} = \operatorname*{MAX}_{x_{K_r} \in X_{K_r}}{}^{P} f_i(x_{K_r}, \overline{x}^P_{-K_r}) \quad (\forall r = 1, \ldots, \omega).$$

Замечание 1. *Отметим, что множество выигрышей $\bigcup\limits_{r=1}^{\omega} \mathscr{F}_{K_r} = \{f^P_i \mid i \in K_r\}$ $(r = 1, \ldots, \omega)$ в силу свойства 3 (паретовости) образует «потолок» изменения $f(x)$ при $\forall x \in X$. В теории кооперативных игр также дополнительно требуется выполнение условия индивидуальной рациональности: для $\forall x^* \in X$, используемой в качестве решения игры Γ:*

$$f_i(x^*) \geqslant \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Это ограничение на x^* снизу в приведенной далее в качестве приложения дифференциальной игре Γ_a, во-первых, $\min f_i(x_i, x_{-i})$ не существует и поэтому условие индивидуальной рациональности не учитывается, во-вторых, хотя в Γ_a не существует равновесие по Нэшу (при определенно положительной $u_i' D_{ij} u_j$) и поэтому в [11] использовалась модификация концепции угроз и контругроз.

Замечание 2. *Нетрудно заметить, что (1) переходит в (6), если в (1) заменить:*

игрока i на коалицию K_i,

стратегию x_i на x_{K_i},

множество X_i *на* X_{K_i} ,
скалярную функцию выигрыша f_i *на векторную* f_{K_i},
операцию $\max\limits_{x_i \in X_i}$ *на* $\underset{x_{K_i} \in X_{K_i}}{\mathrm{MAX}}{}^P$.

Поэтому (6) можно рассматривать как модификацию равновесия по Нэшу (РН), где «роль» игрока i *«выполняет» коалиция* K_i.

Напомним, что в 1949 году двадцатиоднолетний аспирант Принстонского университета Джон Форбс Нэш (мл) предложил в докторской диссертации понятие решения бескоалиционной игры, в последующем названного *равновесием по Нэшу* (РН) [1, 2]. Оно, во-первых, сыграло неоценимую роль в становлении математической экономики, социологии, системного анализа, военных науках; во–вторых, ровно через 45 лет (1994 г.) Джону Нэшу (совместно с Харшаньи и Зельтоном) присуждена Нобелевская премия «за фундаментальный анализ равновесия в теории некооперативных игр»; в-третьих, открывая сейчас почти любой современный журнал по теории игр, исследованию операций, системному анализу и по математической экономике, почти наверняка мы встретимся с работами, затрагивающими те или иные вопросы, связанные с равновесием по Нэшу (РН). Однако «there are spots on the sun». Сюда относятся внутренняя и внешняя неустойчивость множества РН, неустойчивость к отклонению от него двух и более игроков (РН устойчиво к отклонению только одного), РН может не существовать, «улучшаемость», отсутствие эквивалентности и взаимозаменяемости и т.д. В этих случаях авторы видят два выхода. Во-первых, ограничиться лишь математическими моделями, свободными от некоторых из перечисленных (и не перечисленных!) негативных свойств. Во-вторых, вводить новые понятия равновесия, отличные от РН. Здесь, по нашему мнению, перспективными являются равновесие угроз и контругроз и равновесие по Бержу [8, 9]. Еще раз подчеркнем, что в настоящей статье мы не стремимся подвергнуть РН критике, но используем идею Джона Нэша уже для формализации паретовского решения *коалиционных* игр.

В качеств приложения найден [11] явный вид КЭР дифференциальной позиционной линейно-квадратичной игры шести лиц

$$\Gamma_a = \langle \mathbb{N}, \{K_1 = \{1,2,3\}, K_2 = \{4,5,6\}\}, \mathbf{\Sigma}_x, \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\mathcal{J}_i(U,t_0,x_0)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle,$$

где управляемая система $\mathbf{\Sigma}_x \div \dot{x} = A(t)x + \sum\limits_{i=1}^{\mathbb{N}} u_i$, $x(t_0) = x_0$. Здесь, фазовый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и управляющее воздействие i-го игрока $u_i \in \mathbb{R}^n$, $C_{n\times n}[0,\vartheta]$ – множество непрерывных на $[0,\vartheta]$ $n \times n$-матриц, $A(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]$; постоянная $t_0 \in [0,\vartheta)$, коалиционная структура $\mathscr{K} = \{K_1, K_2\}$, $\mathbb{N} = \{1,\ldots,6\}$; $\mathfrak{A}_i$ – множество стратегий i-го игрока

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x \mid \forall\, Q_i(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta]\};$$

функция выигрыша i-го игрока

$$\mathcal{J}_i(U,t_0,x_0) = x'(\vartheta)C_i x(\vartheta) + \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{j=1}^{6} u_j'[t] D_{ij} u_j[t]\, dt.$$

При специальных ограничениях на знакоопределенность квадратичных форм $x'C_i x$, $u_j' D_{ij} u_j$ $(i,j = 1,\ldots,6)$ ($n\times n$ матрицы и C_i и D_{ij} постоянны и симметричны), а также соотношений между максимальными (по абсолютной величине) корнями характеристических уравнений для матриц D_{ij} найден явный вид КЭР

$$\left(\mathcal{J} = \left(\mathcal{J}^P_{K_1}, \mathcal{J}^P_{K_2}\right), U^P = \left(U^P_{K_1}, U^P_{K_2}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$$

здесь

$$\begin{cases} \underset{U_{K_1} \in \mathfrak{A}_{K_1}}{\mathrm{MAX}}{}^P \mathcal{J}_{K_1}(U_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0) = \mathcal{J}^P_{K_1}(U_{K_1}, U^P_{K_2}, t_0, x_0) \\ \underset{U_{K_2} \in \mathfrak{A}_{K_2}}{\mathrm{MAX}}{}^P \mathcal{J}_{K_2}(U^P_{K_1}, U_{K_2}, t_0, x_0) = \mathcal{J}^P_{K_2}(U^P_{K_1}, U_{K_2}, t_0, x_0) \end{cases}$$

при $\forall (t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$ (в [11] приведены подробности доказательства с помощью метода динамического программирования Беллмана-Красовского).

Список литературы

1. Nash J. F. Equilibrium Points in N-Person Games // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1950. Vol. 36, No. 1. P. 48–49.
2. Nash J. F. Non-Cooperative Games // Annales of Mathematics. 1951. Vol. 54, No. 2. P. 286–295.
3. Жуковский В.И., Тынянский Н.Т. Равновесные управления многокритериальных динамических систем. М.: МГУ, 1984. 224 с.
4. Жуковский В.И., Житенева Ю.Н., Бельских Ю.А. Паретовское равновесие угроз и контругроз в одной дифференциальной игре трех лиц // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11, Вып. 1. С. 39–72.
5. Case J.H. A class of games having Pareto optimal Nash equilibrium // J. Optimiz. Theory and Appl. 1974. Vol. 13, No. 3. P. 378–385.
6. Мамедов М.Б. О равновесии по Нэшу ситуации, оптимальной по Парето // Изв. АН Азербайджана. Серия физ.-тех. наук. 1983. Т 4, № 2. С. 11–17.
7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 255 с.
8. Salukvadze M.E., Zhukovskii V.I. The Berge Equilibrium: A Game-Theoretic Framework for the Golden Rule of Ethics. Springer Nature Switzerland AG, 2020. 272 p.
9. Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Жуковская Л.В., Стабулит И.С. К индивидуальной устойчивости паретовского равновесия угроз и контругроз в одной коалиционной дифференциальной игре с нетрансферабельными выигрышами // Математическая теория игр и ее приложения. 2021. Т. 13, Вып. 1. С. 89–101.
10. Жуковский В.И., Чикрий А.А., Плотников В.А. Дифференциальные уравнения. Линейно-квадратичные дифференциальные игры: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2020. 322 с.
11. Жуковский В.И., Жуковская Л.В., Кудрявцев К.Н., Романова В.Э. Об одной модификации равновесия по Нэшу // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2022. Т. 14, № 2. С. 13–30.