.

УДК 519.816

ПОРОГОВОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАНЖИРОВОК

А.Е. Лепский

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Россия, 101000, Москва, Мясницкая ул., 20

E-mail: alepskiy@hse.ru

Ключевые слова: пороговое агрегирование, вероятностные оценки, случайная мощность

Аннотация: Рассматривается задача обобщения известного порогового правила агрегирования трехградационных ранжировок, на случай, когда критериальные значения заданы вероятностными распределениями. Если в классической постановке пороговое правило агрегирования сводится к лексикографическому правилу сравнения векторов мощностей оценок разной градации, то в случае вероятностных оценок их мощность будет представлять собой случайную величину. Рассматриваются свойства этой величины. Приведен численный пример применения порогового агрегирования вероятностных ранжировок.

1. Введение

Важной задачей теории принятия решений является ранжирование альтернатив, каждая из которых оценивается по ряду критериев. Одним из популярных способов решения такой задачи является применение правил агрегирования критериальных векторов, соответствующих каждой альтернативе, в ранги этих альтернатив [4]. В ряде модельных ситуаций такие правила должны иметь так называемый некомпенсаторный характер. Это означает, что низкие оценки по одним критериям не могут быть компенсированы высокими оценками по другим критериям. Примерами таких ситуаций является выбор товаров по ряду критериев, отбор кандидатов на должность и т. д. В этом случае, в частности, популярная линейная свертка критериев не может быть использована в качестве агрегирующего оператора.

Одним из некомпенсторных методов агрегирования предпочтений является так называемое пороговое правило агрегирования ранжировок [1, 2]. Это правило, которое первоначально было аксиоматически введено для трехградационных ранжировок, сводится к лексикографическому сравнению векторов мощностей оценок разного ранга.

В первоначальной постановке предполагалось, что все альтернативы оцениваются в m-градационной шкале. Однако нетрудно представить ситуацию, когда оценки в альтернативах могут быть неточными. В этом случае возникает задача обобщения порогового правила агрегирования на случай таких оценок.

Характер неточностей данных (например, экспертных оценок) может быть различным: вероятностным, интервальным, нечетким и т. д.

Теоретически возможны два основных подхода к построению обобщений порогового правила на случай неточных данных. Первый связан с построением соответствующей аксиоматики и правила агрегирования на основе этой новой аксиоматики. Второй – построение аналога вектора мощности оценок для неточных данных.

Если говорить о втором подходе, то здесь можно выделить два способа построения аналога вектора мощности оценок разных рангов. Первый способ предполагает построение вектора скалярных мощностей неточных оценок. Заметим, что в теории нечетких множеств хорошо известна задача скалярного оценивания мощности одного нечеткого множества. Обзор по методам решения такой задачи можно найти в [6]. Но применительно к обобщению задачи порогового агрегирования, необходимо оценить мощность множества неточных оценок некоторого ранга. Скалярный подход предполагает, что в этом случае используется неотрицательная (скалярная) функция, определенная на множестве неточных оценок и обобщающая понятие мощности. Так в [7] была построена скалярная функция мощности для множества нечетких экспертных оценок, которая использовалась для обобщения правила порогового агрегирования.

Другой подход связан с построением неточной функции мощности множества неточных оценок определенного ранга в рамках рассматриваемой модели неточности (например, нечеткая мощность для множества нечетких оценок). В результате, например, в рамках теории нечетких множеств мы получим вектор нечетких мощностей оценок разных рангов. Заметим, что в теории нечетких множеств рассматривается понятие нечеткой мощности для одного нечеткого множества [8]. В нашем же случае необходимо построение неточных (например, нечетких) мощностей для множества неточных оценок определенного ранга.

В данной статье будет рассмотрена задача обобщения порогового правила агрегирования на случай, когда оценки заданы в виде дискретных вероятностных распределений. Будет применен второй из обсуждаемых выше подходов, а именно, построение случайных величин, имеющих смысл мощности векторов случайных оценок определенного ранга.

2. Задача порогового агрегирования с точными данными

Пусть X – некоторое множество альтернатив, каждая из которых оценивается по n критериям в трехградационной шкале. Можно считать, что альтернативы представлены n-мерными векторами: $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, где $x_i \in \{1, 2, 3\}$. Требуется построить оператор агрегирования $\varphi_n = \varphi : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям (аксиомам) [1, 2]:

1) Парето-доминирование: если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и $x_i \geqslant y_i \ \ \forall i, \ \exists s : \ \ x_s > y_s$, то $\varphi(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{y})$;

2) попарная компенсируемость критериев: если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и $v_k(\mathbf{x}) = v_k(\mathbf{y})$ $k = 1, 2$, то $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$, где $v_k(\mathbf{x}) = |\{i : x_i = k\}|$ – число оценок k в альтернативе $\mathbf{x}$,

$k = 1, 2, 3$;

3) пороговая некомпенсируемость: $\varphi(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n}) > \varphi(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in X$: $\exists s: \ x_s = 1$;

4) аксиома редукции: если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X\ \exists s: \ x_s = y_s$, то $\varphi_n(\mathbf{x}) > \varphi_n(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \varphi_{n-1}(\mathbf{x}_{-s}) > \varphi_{n-1}(\mathbf{y}_{-s})$, где $\mathbf{x}_{-s} = (x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n)$.

Показано, что указанным аксиомам удовлетворяет лексикографическое правило агрегирования: $\varphi(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \exists j \in \{1, 2\} : v_k(\mathbf{x}) = v_k(\mathbf{y})\ \forall k \leqslant j$ и $v_{k+1}(\mathbf{x}) < v_{k+1}(\mathbf{y})$. В [5] задача порогового агрегирования была обобщена на случай m-градационных шкал, $m \geqslant 3$.

3. Задача порогового агрегирования с вероятностными данными

Пусть каждая альтернатива представлена n-мерным вектором $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_n})$, где оценка $\widetilde{x_i}$ характеризуется тройкой неотрицательных чисел $\widetilde{x_i} = (p_{iL}, p_{iM}, p_{iH})$, $p_{iL} + p_{iM} + p_{iH} = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Число p_{iL} можно трактовать, как субъективную вероятность, с которой i-й эксперт оценивает принадлежность альтернативы классу низких оценок L. Аналогично, p_{iM} и p_{iH} – субъективные вероятности, с которыми i-й эксперт оценивает принадлежности альтернативы классам средних оценок M и классу высоких оценок H соответственно. Таким образом, относительно альтернативы $\widetilde{\mathbf{x}}$ имеем матрицу $\mathbf{P}\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = (p_{iS})^{n}_{i=1;\, S=L,M,H}$.

3.1. Случайная мощность множества оценок

Рассмотрим случайную величину $C_S\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right)$, которая принимает значения множества $\{0, \ldots, n\}$ и $P\left\{C_S\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = k\right\}$ – вероятность того, что среди оценок n экспертов будет ровно k оценок класса $S \in \{L, M, H\}$. Случайные величины $C_S\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right)$ можно трактовать как случайные мощности множества оценок класса $S \in \{L, M, H\}$. Пусть $I_k = \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\}$. Нетрудно видеть, что $P\left\{C_S\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = k\right\} = q_k(\mathbf{p}_S)$, $k = 1, \ldots, n$, $S \in \{L, M, H\}$, где $\mathbf{p}_S = (p_{1S}, \ldots, p_{nS})$ и

(1)
$$q_0(\boldsymbol{\alpha}) = (1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_n),$$
$$q_k(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_k} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} (1 - \alpha_{j_1}) \ldots (1 - \alpha_{j_{n-k}}), \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0, 1]^n$.

3.2. Свойства случайной мощности

Пусть $Q(\boldsymbol{\alpha})$ – случайная величина, имеющая распределение (1). Отметим некоторые его свойства:

1) если $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$, то $q_k(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} 1, \ k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \\ 0, \ k \neq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \end{cases} \quad k = 0, \ldots, n;$

2) если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = p \in (0,1)$, то $q_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$, $k = 0,\ldots,n$ – биномиальное распределение;

3) $E[Q(\boldsymbol{\alpha})] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$;

4) $\sigma^2[Q(\boldsymbol{\alpha})] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(1-\alpha_k)$;

5) распределение $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = (q_0(\boldsymbol{\alpha}),\ldots,q_n(\boldsymbol{\alpha}))$ – унимодальное, т. е. $\exists r,s \in \{0,\ldots,n\}$, $r \leqslant s$: последовательности $(q_0(\boldsymbol{\alpha}),\ldots,q_r(\boldsymbol{\alpha}))$ – неубывающая, $(q_s(\boldsymbol{\alpha}),\ldots,q_n(\boldsymbol{\alpha}))$ – невозрастающая, $q_r(\boldsymbol{\alpha}) = \ldots = q_s(\boldsymbol{\alpha})$.

Свойство 1) означает, что в случае вырожденных (неслучайных) оценок распределение $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = (q_0(\boldsymbol{\alpha}),\ldots,q_n(\boldsymbol{\alpha}))$ также становится вырожденным и $q_k(\boldsymbol{\alpha}) = 1$ для индекса k, равного мощности множества (неслучайных) оценок.

Из свойства 3) следует, что средние значения случайных величин $C_S(\widetilde{\mathbf{x}})$ будут равны $E[C_S(\widetilde{\mathbf{x}})] = \sum_{i=1}^{n} p_{iS}$, $S \in \{L,M,H\}$.

3.3. Лексикографическое ранжирование случайных мощностей оценок

Далее для применения лексикографического правила ранжирования множества векторных вероятностных альтернатив $\{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ относительно функции вероятностной мощности $\mathbf{C}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (C_L(\widetilde{\mathbf{x}}), C_M(\widetilde{\mathbf{x}}), C_H(\widetilde{\mathbf{x}}))$ необходимо использовать некоторое правило сравнения вероятностных распределений [3].

Например, если использовать сравнение по среднему значению $E[\cdot]$, то $\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{y}}) \Leftrightarrow E[C_L(\widetilde{\mathbf{x}})] < E[C_L(\widetilde{\mathbf{y}})]$ или $E[C_L(\widetilde{\mathbf{x}})] = E[C_L(\widetilde{\mathbf{y}})]$, $E[C_M(\widetilde{\mathbf{x}})] < E[C_M(\widetilde{\mathbf{y}})]$ или $E[C_L(\widetilde{\mathbf{x}})] = E[C_L(\widetilde{\mathbf{y}})]$, $E[C_M(\widetilde{\mathbf{x}})] = E[C_M(\widetilde{\mathbf{y}})]$, $E[C_H(\widetilde{\mathbf{x}})] < E[C_H(\widetilde{\mathbf{y}})]$.

4. Численный пример

Пусть заданы 5-ть вероятностных оценок двух альтернатив (см. Таблицу 1): векторы $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_5)$ и $\widetilde{\mathbf{y}} = (\widetilde{y}_1,\ldots,\widetilde{y}_5)$.

Таблица 1. Вероятностные оценки альтернатив $\widetilde{\mathbf{x}}$ и $\widetilde{\mathbf{y}}$

$\widetilde{\mathbf{x}}$	$\widetilde{\mathbf{y}}$
$\widetilde{x}_1 = (0.3,\ 0.6,\ 0.1)$	$\widetilde{y}_1 = (0.2,\ 0.3,\ 0.5)$
$\widetilde{x}_2 = (0.4,\ 0.5,\ 0.1)$	$\widetilde{y}_2 = (0.2,\ 0.7,\ 0.1)$
$\widetilde{x}_3 = (0.6,\ 0.2,\ 0.2)$	$\widetilde{y}_3 = (0.8,\ 0.2,\ 0)$
$\widetilde{x}_4 = (0.7,\ 0.2,\ 0.1)$	$\widetilde{y}_4 = (0.1,\ 0.3,\ 0.6)$
$\widetilde{x}_5 = (0.3,\ 0.3,\ 0.4)$	$\widetilde{y}_5 = (0.1,\ 0.9,\ 0)$

Результаты вычислений распределений $\mathbf{C}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (C_L(\widetilde{\mathbf{x}}), C_M(\widetilde{\mathbf{x}}), C_H(\widetilde{\mathbf{x}}))$ и $\mathbf{C}(\widetilde{\mathbf{y}}) = (C_L(\widetilde{\mathbf{y}}), C_M(\widetilde{\mathbf{y}}), C_H(\widetilde{\mathbf{y}}))$ по формуле (1), а также их математических ожиданий приведены в Таблице 2.

Тогда, применяя сравнение по среднему значению, получим, что $\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}) < \varphi(\widetilde{\mathbf{y}})$, так как $E[C_L(\widetilde{\mathbf{x}})] > E[C_L(\widetilde{\mathbf{y}})]$.

Таблица 2. Распределения случайных мошностей

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$E[\cdot]$
$P\{C_L(\widetilde{\mathbf{x}}) = k\}$	0.03	0.19	0.36	0.3	0.11	0.01	2.3
$P\{C_M(\widetilde{\mathbf{x}}) = k\}$	0.09	0.31	0.37	0.19	0.04	0	1.8
$P\{C_H(\widetilde{\mathbf{x}}) = k\}$	0.35	0.44	0.18	0.03	0	0	0.9
$P\{C_L(\widetilde{\mathbf{y}}) = k\}$	0.1	0.49	0.32	0.08	0.01	0	1.4
$P\{C_M(\widetilde{\mathbf{y}}) = k\}$	0.01	0.15	0.4	0.33	0.1	0.01	2.4
$P\{C_H(\widetilde{\mathbf{y}}) = k\}$	0.18	0.47	0.32	0.03	0	0	1.2

5. Заключение

В статье рассмотрена задача обобщения порогового правила агрегирования трехградационных ранжировок на случай, когда оценки альтернатив по ряду критериев заданы в виде дискретных вероятностных распределений. Это обобщение связано с построением случайной мощности множества вероятностных оценок заданного ранга. Исследованы некоторые свойства случайной мощности и приведен численный пример.

Исследование выполнено в рамках Программы научного проекта «Исследование моделей и методов принятия решений в условиях глубокой неопределенности» НИУ ВШЭ.

Список литературы

1. Алескеров Ф.Т., Якуба В.И. Об одном методе агрегирования ранжировок специального вида // Тезисы докладов II Международной конференции по проблемам управления. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2003. С. 116.
2. Алескеров Ф.Т., Юзбашев Д.А., Якуба В.И. Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок // Автоматика и телемеханика. 2007. № 1. С. 147–152.
3. Лепский А.Е. Стохастическое и нечеткое упорядочивание методом минимальных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2017. № 1. С. 59–79.
4. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа. М.: Юрайт, 2023.
5. Aleskerov F., Chistyakov V., Kalyagin V. Social threshold aggregations // Social Choice Welfare. 2010. Vol. 35. P. 627–646.
6. Dubois D., Prade H. Fuzzy cardinality and modelling of imprecise quantification // Fuzzy Sets and Systems. 1985. Vol. 16. P. 199–230.
7. Lepskiy, A. Fuzzy Threshold Aggregation // In: Kahraman C. et al. (eds), Intelligent and Fuzzy Systems. INFUS 2023. Lecture Notes in Networks and Systems. 2023. Cham: Springer. Vol. 758. P. 69–76.
8. Zadeh L. A theory of approximate reasoning // In: J.E. Hayes et al (eds), Machine Intelligence. 1979. John Wiley and Sons. Vol. 9. P. 149–194.