УДК 519.816

СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ: МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ АСПЕКТ

А.П. Нелюбин
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
Россия, 117997, Москва, Малый Харитоньевский переулок, 4
E-mail: nelubin@gmail.com

В.В. Подиновский
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Россия, 109028, Москва, Покровский бульвар, 11
E-mail: podinovski@mail.ru

Ключевые слова: средние величины, многокритериальные задачи выбора, отношения предпочтения, недоминируемые точки, теория важности критериев.

Аннотация: Рассматривается новый подход к определению понятия средней величины для множества X, состоящего из n точек; удаленность произвольной точки x от каждой отдельной точки x_i оценивается расстоянием $f_i(x)$ между ними, а удаленность точки x от всего множества X характеризуется векторным критерием $(f_1(x),\dots,f_n(x))$; этот критерий не свёртывается в одну функцию n переменных, а используется для задания отношения предпочтения в удаленности; средней величиной считается точка, недоминируемая по такому отношению. Рассмотрены отношения, соответствующие случаю отсутствия информации о сравнительной важности критериев, случаю равноважности критериев, а также когда дополнительно известно, что желательно «равномерное» выравнивание расстояний $f_i(x)$. Указана взаимосвязь соответствующих средних с основными статистическими средними (средней арифметической, медианой и другими). Представлены точные и эффективные методы построения множеств указанных средних.

1. Введение

В управлении для характеристики статистических и иных массивов данных широко используются средние величины. Однако следует помнить, что «… не существует возможности нахождения некой универсальной формулы, исчерпывающей понятие средней величины и обладающей конструктивными достоинствами». (Из предисловия к книге [1].) Поэтому актуальной остается проблема поиска подходов к общей формулировке понятия средней величины и ее конкретизации для различных ситуаций.

Доклад посвящен новому подходу к решению указанной проблемы, основанному на идеях и методах многокритериальной оптимизации. Впервые он был предложен и развит авторами в [2, 3]. Далее дается краткий обзор некоторых основных из ранее полученных результатов и приводятся новые; в частности, описывается метод построения множества средних для случая равноважных критериев.

2. Базовые определения

Пусть дано множество чисел $X = \{x1, x2, \ldots, xn\}$, называемых далее точками $(n \geq 2)$.

Упорядоченные соответственно по неубыванию и невозрастанию множества

$$X\uparrow \; = < x(1), x(2), \ldots, x(n) >; X\downarrow \; = < x[1], x[2], \ldots, x[n] >,$$

где $x(1) \leq x(2) \leq \ldots \leq x(n)$ и $x[1] \geq x[2] \geq \ldots \geq x[n]$, получаются из X при помощи соответствующих перестановок.

Пусть x – произвольное фиксированное число – точка на числовой прямой R. Удаленность ее от отдельной точки x_i из X можно оценить расстоянием $yi = |x - xi|$. Тогда удаленность x от совокупности всех точек из X характеризуется вектором $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, составленным из таких расстояний. Его можно считать значением векторного критерия $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$, где $f_i(x) = |x - x_i|$. Область его значений Z – положительный квадрант $R_+^n = [0, +\infty)^n$ – множество векторов с неотрицательными компонентами.

Пусть на Z задано отношение строгого предпочтения – строгий частичный порядок P^{Γ}, где Γ – информация о предпочтениях, касающаяся удаленности: если верно $f(x)P^{\Gamma}f(x')$, то точка x *считается более* близкой к X, чем x'. Поэтому на роль наиболее близких к X могут претендовать лишь те точки, векторные оценки которых которые недоминируемы по P^{Γ}. Если множество таких точек $G^{\Gamma}(X)$ внешне устойчиво, то все они будут называться средними по P^{Γ}.

В том случае, когда информации об относительной важности критериев нет $(\Gamma = \varnothing)$, отношением $P^{\Gamma} = P^{\varnothing}$ является отношение Парето:

$$y^{P}\varnothing z \Leftrightarrow y_i \leq z_i, i = 1, 2, \ldots, n;\; y \neq z.$$

Теорема 1. *Средними по* $P^{\varnothing}$ *являются все точки отрезка от* $x_{(1)} = \min_{i\in N} x_i$ *до* $x_{(n)} = \max_{i\in N} x_i$, и только они, *т.е.* $G^{\varnothing}(X) = \overline{X} = [x_{(1)}, x_{(n)}]$.

Таким образом, средние по P^{Γ} – это средние по Коши [1, 2].

Пусть теперь критерии равноважны [4]: $\Gamma = E$. Соответствующее отношение P^E задается любым из следующих равносильных решающих правил:

$$yP^Ez \Leftrightarrow y_{(1)} \leq z_{(1)}, y_{(2)} \leq z_{(2)}, \ldots, y_{(n)} \leq z_{(n)};$$

$$yP^Ez \Leftrightarrow y_{[1]} \leq z_{[1]}, y_{[2]} \leq z_{[2]}, \ldots, y_{[n]} \leq z_{[n]};$$

при этом для каждого из правил хотя бы одно неравенство должно быть строгим.

Пусть равноважные критерии, с использованием которых описываются предпочтения, имеют шкалу первой порядковой метрики (информация $E\Delta$). Это означает, что если в произвольной векторной оценке y, в которой $y_i > y_j$, заменить y_i на $y_i - \delta$, а y_j – на $y_j + \delta$, где δ – положительное число такое, что $y_i - \delta \geq y_j + \delta$, то полученная таким образом векторная оценка z будет предпочтительнее, чем исходная y. Содержательно это означает, что желательно «равномерное» выравнивание отклонений (аналог известного в теории коллективного благосостояния принципа Пигу-Дальтона).

Отношение строгого предпочтения $P^{E\Delta}$, порождаемое информацией $E\Delta$ на Z, задается так [5]:

$$yP^{E\Delta}z \Leftrightarrow y_{[1]} \leq z_{[1]},\; y_{[1]} + y_{[2]} \leq z_{[1]} + z_{[2]}, \ldots, y_{[1]} + y_{[2]} + \ldots + y_{[n]} \leq z_{[1]} + z_{[2]} + \ldots z_{[n]},$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим.

3. Методы построения множеств средних

Вначале рассмотрим случай равноважных критериев. Метод построения множества $G^E(X)$ средних по P^E основывается на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Пусть все исходные точки множества* X *расположены в узлах равномерной сетки. Тогда для проверки принадлежности к средним по* P^E *любого узла* *этой сетки достаточно сравнить его векторную оценку с векторными оценками остальных узлов этой сетки.*

Лемма 2. *Если точки множества X расположены в узлах равномерной сетки с шагом $h = 2\xi$, то тогда или весь интервал $(k\xi, k\xi + \xi)$, где k – целое число, включен во множество средних $G^E(X)$, или ни одна точка этого интервала не принадлежит $G^E(X)$.*

Лемма 1 доказана в [2]; доказательство леммы 2 весьма громоздко, и мы его опускаем.

Заметим, что равномерная решетка, удовлетворяющая условиям лемм, всегда может быть построена, если все точки в X – рациональные числа. В практических приложениях обычно все эти числа являются целыми или же конечными десятичными дробями. Отметим также, что достаточно, чтобы решетка покрывала лишь множество $\overline{X} = [x_{(1)}, x_{(n)}]$.

Согласно Лемме 2, множество $G^E(X)$ есть объединение промежутков между узлами сетки, состоящими из всех ее недоминируемых ее узлов – точек с недоминируемыми по P^E векторными оценками, и недоминируемых узлов этой сетки – границ указанных интервалов.

Метод состоит в следующем. На отрезке $\overline{X}$ строится сетка с шагом $½\xi = ¼\, h$:

$$\{x_{(1)}, (x_{(1)} + ¼\, h), (x_{(1)} + ½\, h), \ldots, (x_{(n)} - ¼\, h), x_{(n)}\}.$$

Выделяются недоминируемые её узлы путем попарных сравнений по P^E этих узлов с использованием любого из решающих правил для P^E. Согласно Лемме 1, они будут входить в $G^E(X)$.

Далее среди интервалов длиной $\xi = ½\, h$, границы которых лежат в узлах сетки, т.е. из интервалов

$$(x_{(1)}, x_{(1)} + ½\, h), (x_{(1)} + ½\, h, x_{(1)} + h), \ldots, (x_{(n)} - ½\, h, x_{(n)}),$$

середины которых являются узлами сетки, т.е. точками

$$x_{(1)} + ¼\, h, x_{(1)} + ¾\, h, \ldots, x_{(n)} - ¼\, h,$$

выделяются все интервалы, у которых середины являются недоминируемыми по P^E.

Наконец, выделенные интервалы объединяются и к ним добавляются недоминируемые границы этих интервалов – узлы сетки с шагом $½\, h$.

Например, используя описанный метод и сетку с шагом ¼ ·1 = 0,25, можно убедиться в том, что

$$G^E(\{1, 2, 5, 9, 11\}) = [1{,}5; 7{,}5) \cup (8{,}5; 9{,}5).$$

Теперь рассмотрим случай, когда критерии <u>равноважны</u> и имеют <u>шкалу первой порядковой метрики</u>. Пусть $H = \{1, 2, \ldots, h\}$, где $h = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ – целая часть числа $(n+1)/2$.

Теорема 2. *Средними по $P^{E\Delta}$ являются все точки отрезка от $\alpha(X)$ до $\beta(X)$, и только они, т.е. $G^{E\Delta}(X) = [\alpha(X), \beta(X)]$, где:*

$$\alpha(X) = ½ \min_{p\in H}\left(x_{(p)} + x_{(n+1-p)}\right), \beta(X) = ½ \max_{p\in H}\left(x_{(p)} + x_{(n+1-p)}\right).$$

Например, согласно описанному методу, для $X = \{1, 2, 5, 9, 11\}$ имеем:

$h = \lfloor (n+1)/2 \rfloor = 3$, $\alpha(X) = ½\{1 + 11, 2 + 9, 5 + 5\} = 5$, $\beta(X) = ½\{12, 11, 10\} = 6$,

так что

$$G^{E\Delta}(\{1, 2, 5, 9, 11\}) = [5, 6].$$

4. О свойствах средних величин

Поскольку $P^{\varnothing} \subset P^E \subset P^{E\Delta}$, то имеют место нестрогие включения $G^{\varnothing}(X) \supseteq G^E(X) \supseteq G^{E\Delta}(X)$.

Структура множеств средних $G^{\varnothing}(X)$ и $G^{E\Delta}(X)$ совсем проста: это – отрезки. А вот $G^{E}(X)$ может представлять собою объединение нескольких непересекающихся числовых промежутков, причем незамкнутых (см. пример выше). Это не соответствует интуитивному представлению о понятии средней величины, и поэтому средние по P^{E} вряд ли имеют прикладную ценность.

Оказывается, что средняя арифметическая всегда входит в состав $G^{E\Delta}(X)$, чего нельзя сказать, например, о средних квадратической, геометрической и гармонической. Если число точек n нечетно, то медиана определяется однозначно и входит в состав $G^{E\Delta}(X)$; если же n четно, то медиана оказывается многозначной средней, но обязательно пересекается с $G^{E\Delta}(X)$. Аналогичные утверждения справедливы и для $G^{E}(X)$.

Средние по $P^{E\Delta}$ являются устойчивыми к изменению исходных данных в том смысле, что при замене чисел x_i на $x_i + \varepsilon_i$ границы множества $G^{E\Delta}(X)$ изменятся не более чем на величину $\max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \ldots, |\varepsilon_n|\}$. Такой устойчивостью не обладают средние по P^{E}: сколь угодно малое изменение (сдвиг) даже только одной из точек в X может привести к «большому» изменению множества $G^{E}(X)$.

5. Заключение

Новые понятия средних основаны на идеях многокритериальной оптимизации и не предполагают наличие у конструируемых (выбираемых) средних некоторых априорных свойств (что типично при классическом подходе к выбору средних в статистике и иногда может затруднять выбор средней в конкретной задаче [1]). Введенные средние являются множественными, причем множества средних по P^{E} могут иметь достаточно сложную структуру, а множества средних по $P^{E\Delta}$ суть отрезки вида $[\alpha(X), \beta(X)]$.

Разработаны точные и эффективные методы построения множеств таких средних, что обеспечивает возможности их практического использования.

Средние по $P^{E\Delta}$ представляются полезным дополнением к набору известных в статистике средних величин, но могут использоваться и самостоятельно. Если требуется получить однозначную среднюю, то на ее роль можно взять величину

$$\gamma(X) = ½[\alpha(X) + \beta(X)].$$

Работа выполнена при частичной поддержке Международного центра анализа и выбора решений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Список литературы

1. Джини К. Средние величины. М.: Статистика, 1970. 447 с.
2. Подиновский В.В., Нелюбин А.П. Средние величины: многокритериальный подход // Проблемы управления. 2020. № 5. С. 3-16.
3. Подиновский В.В., Нелюбин А.П. Средние величины: многокритериальный подход. II // Проблемы управления. 2021. № 2. С. 33-41.
4. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15. С. 330-344.
5. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983. 574 с.