УДК 519.17

ИГРА ЗАПОЛНЕНИЯ С УЧАСТИЕМ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ НЕСКОЛЬКИХ ТИПОВ

Н.Н. Никитина
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
Россия, 185910, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
E-mail: nikitina@krc.karelia.ru

В.В. Мазалов
Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН
Россия, 185910, Петрозаводск, Пушкинская ул., 11
E-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

Ключевые слова: игра заполнения, игра маршрутизации, потенциал, равновесие по Нэшу, парадокс Браесса, транспортный граф.

Аннотация: Неоднородные игры заполнения позволяют моделировать дорожные ситуации с участием транспортных средств нескольких типов, имеющих различные предпочтения в выборе маршрутов. В работе доказывается существование потенциала в дискретной игре заполнения с n типами игроков. Приводится пример вычисления равновесий и возникновения парадокса Браесса.

1. Введение

Игры заполнения позволяют моделировать ситуации, в которых несколько игроков совместно используют ресурсы (например, автомобильные дороги, Интернет-каналы или земельные участки), и выигрыш каждого игрока зависит от того, сколько других игроков используют выбранный ресурс одновременно с ним. В сетевой постановке игроки выбирают и совместно используют пути в графе, и тогда речь идет об играх маршрутизации.

В зависимости от того, одинаков ли вид функций выигрыша у различных игроков, игры заполнения подразделяют на симметрические и персонифицированные. Применительно к играм маршрутизации, в литературе их называют однородными и неоднородными (многоклассовыми) [1, 2]. В однородных играх задержка на ребре одинакова для всех игроков. В неоднородных играх у разных игроков могут быть разные функции задержки.

В литературе представлено множество примеров применения неоднородных игр маршрутизации в моделировании транспортных систем. Это объясняется тем, что на практике участники дорожного движения руководствуются различными предпочтениями при выборе маршрутов в зависимости, например, от типа транспортного средства [3], наличия или отсутствия навигатора [4], объема доступной информации о дорожной ситуации [5] и других соображений.

Наличие выпуклого потенциала в игре гарантирует существование равновесия по Нэшу и сходимость к нему последовательности лучших или наилучших ответов игроков при произвольной топологии графа [6], [7]. Это упрощает достижение равновесия в транспортной сети, где каждый водитель выбирает свой маршрут самостоятельно, приводя систему в оптимальное для всех игроков состояние.

В данной работе исследуется дискретная персонифицированная игра заполнения с участием транспортных средств n типов, которые выбирают маршруты движения в городской транспортной сети. Доказано, что игра является потенциальной.

2. Потенциал в игре заполнения с участием транспортных средств нескольких типов

Дано множество игроков n типов $N = \{N_1, \dots, N_n\}$, число которых составляет $|N_t| = n_t$, $t = 1, \dots, n$. Игроки выбирают ресурсы из множества $M = \{1, ..., m\}$. С каждым ресурсом j связаны функции задержек $c_j^{(1)}(k)$, $\dots$, $c_j^{(n)}(k)$, где верхний индекс (t) — тип игрока.

Стратегией игрока $i \in N$ является выбор подмножества ресурсов. Пусть профиль выбранных стратегий $s = \{s_i, i \in N\}$. Каждому профилю стратегий s соответствует вектор заполнения $k(s) = (k_1(s), ..., k_m(s))$, $k_j(s) = k_j^{(1)}(s) + \dots + k_j^{(n)}(s), j \in M$. Здесь $k_j^{(t)}(s)$ — число игроков типа t, выбравших ресурс j. Имеет место соотношение $\sum\limits_{j=1}^{m} k_j^{(t)}(s) = n_t$ для $t = 1, \dots, n$.

Выигрыш игрока зависит от типа данного игрока и стратегий, выбранных остальными игроками, и строится следующим образом. При выборе ресурса $j \in M$ игроки первого типа получают выигрыш $-c_j^{(1)}(k)$, где k — общее число игроков, выбравших данный ресурс j. Игроки второго типа получают выигрыш $-c_j^{(1)}(k) - c_j^{(2)}(k_j^{(2)} + \dots + k_j^{(n)})$, где k — общее число игроков, выбравших данный ресурс j, и $k_j^{(t)}$ — число игроков типа t, выбравших данный ресурс j $(t = 2, \dots, n)$. Аналогичным образом строятся функции выигрыша игроков всех остальных типов. Наконец, игроки n-го типа получают выигрыш $-c_j^{(1)}(k) - c_j^{(2)}(k_j^{(2)} + \dots + k_j^{(n)}) - \dots - c_j^{(n)}(k_j^{(n)})$. Выигрыш здесь берется со знаком минус, поскольку c_j^t представляют собой затраты игрока типа t.

Таким образом, для профиля стратегий $s = \{s_i, i \in N\}$ выигрыш i-го игрока, имеющего тип t, имеет вид

$$H_i^{(t)} = -\sum_{j \in s_i} \sum_{p=1}^{t} c_j^{(p)} \left(\sum_{l=p}^{n} k_j^{(l)}(s) \right). \tag{1}$$

Для краткости обозначим общее число игроков, использующих ресурс j в профиле стратегий s и имеющих тип не младше p, как $K_j^{(p)}(s) = \sum\limits_{l=p}^{n} k_j^{(l)}(s)$. Доказана

Теорема 1. *Данная игра является потенциальной, и потенциал имеет вид*

$$P(s) = -\sum_{j\in M}\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{K_j^{(p)}(s)} c_j^{(p)}(k).$$

Поскольку игра является потенциальной, выполняется свойство конечности улучшений (FIP), и алгоритм последовательных улучшений сходится к равновесию по Нэшу в чистых стратегиях.

Пример. Рассмотрим дорожную сеть, представленную на рис. 1. Игроки движутся из пункта A в пункт B и могут выбрать один из трех маршрутов: (A,C,B), (A,D,B) или (A,C,D,B). Всего имеется три типа игроков, число которых составляет $n_1 = 10$ (автомобили), $n_2 = 10$ (автобусы) и $n_3 = 10$ (грузовики). С каждым участком дороги j связана функция задержек $c_j(k) = 100/(r_j - k)$, где

$$r_{AC} = 58, r_{CB} = 35, r_{AD} = 38, r_{DB} = 55, r_{CD} = 300. \tag{2}$$

Функции выигрыша имеют вид (1), где $c_j^{(p)}(k) = c_j(k), 1 \leqslant p \leqslant 3$.

Обозначим v_r — вектор загрузки маршрута r, $v_r = (k_r^{(1)}, k_r^{(2)}, k_r^{(3)})$. Пусть затраты на обслуживание дорожной сети выражаются квадратической функцией

$$SOC(s) = \left(k_j^{(1)}(s)\right)^2 + 2\left(k_j^{(2)}(s)\right)^2 + 3\left(k_j^{(3)}(s)\right)^2.$$

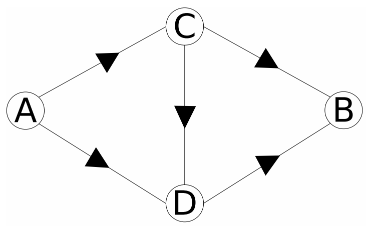

Рис. 1. Дорожная сеть с указанием направлений движения.

Заметим, что глобальный оптимум затрат системы, $SOC(s) = 600$, достигается в ситуации

$$v_{ACB} = (5,5,5);\ v_{ADB} = (5,5,5);\ v_{ACDB} = (0,0,0),$$

которая не является равновесием по Нэшу, поскольку игроку третьего типа выгодно перейти с маршрута (A,C,B) на маршрут (A,C,D,B). Наихудшим равновесием по Нэшу является ситуация

$$v_{ACB} = (6,1,0);\ v_{ADB} = (4,3,0);\ v_{ACDB} = (0,6,10),$$

в которой суммарные затраты системы составляют $SOC(s) = 1356$ при затратах на обслуживание участка дороги (C,D) $d_{CD}(s) = 372$, то есть $d_{AC}(s) + d_{CB}(s) + d_{AD}(s) + d_{DB}(s) = 984$. При этом автомобили тратят на проезд в среднем 6.4 минуты, автобусы – 11.9 минут, а грузовики – 16.5 минут.

Если же удалить участок дороги (C, D) (рис. 2), то глобальным оптимумом остается ситуация

$$v_{ACB} = (5, 5, 5);\ v_{ADB} = (5, 5, 5),$$

а наихудшим равновесием по Нэшу становится ситуация

$$v_{ACB} = (4, 8, 2);\ v_{ADB} = (6, 2, 8),$$

в которой затраты системы составляют $d_{AC}(s) + d_{CB}(s) + d_{AD}(s) + d_{DB}(s) = 784$. Данный пример иллюстрирует проявление парадокса Браесса: при удалении ребра затраты системы в самом плохом равновесии уменьшились.

В данном примере в любом равновесии по Нэшу грузовики выбирают только маршрут (A, C, D, B), а игроки остальных типов распределяются между тремя маршрутами. Если снижать коэффициент задержки r_{CD}, то появляются равновесия по Нэшу, в которых грузовики выбирают другие маршруты.

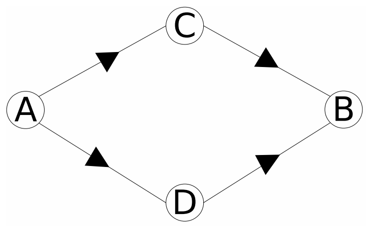

Рис. 2. Дорожная сеть после удаления ребра (C, D).

Например, пусть $r_{CD} = 65$. Наихудшим равновесием по Нэшу в таком случае является ситуация

$$v_{ACB} = (3, 7, 2);\ v_{ADB} = (3, 2, 8);\ v_{ACDB} = (4, 1, 0).$$

При этом среднее время проезда составляет 6.8, 12.7 и 17.4 минуты. Изменился характер нагрузки на ребро с минимальной задержкой (C, D): с него ушли все грузовики и часть автобусов, пришли автомобили, нагрузка на ребро составила $d_{CD}(s) = 18$, а суммарные затраты системы снизились в 1.7 раза: $SOC(s) = 794$.

Таким образом, меняя задержку на заданном участке дороги, можно регулировать его загрузку отдельными видами транспорта, не существенно ухудшая при этом выигрыши игроков.

3. Заключение

Неоднородные игры маршрутизации позволяют моделировать ситуации с участием транспортных средств, имеющих различные предпочтения в выборе маршрутов и оказывающих различное влияние как на поведение остальных участников дорожного движения, так и на затраты системы в целом. Важным свойством таких игр является наличие потенциала, что гарантирует существование равновесия по Нэшу и упрощает его достижение. При этом эффективность равновесий зависит от параметров модели и топологии сети. На практике стимулировать достижение социального оптимума можно, например, рекомендуя конкретный маршрут заданному подмножеству водителей в программе-навигаторе, вводя ограничения на скорость или запрет на проезд отдельных видов транспорта.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22-11-20015, https://rscf.ru/project/22-11-20015. Вычисления выполнены с использованием ресурсов ЦКП КарНЦ РАН «Центр высокопроизводительной обработки данных».

Список литературы

1. Farokhi F., Krichene W., Bayen A.M., Johansson K.H. A heterogeneous routing game // 2013 51st Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). IEEE. 2013. P. 448–455.
2. Dafermos S.C. The traffic assignment problem for multiclass-user transportation networks // Transportation science. 1972. Vol. 6, No. 1. P. 73–87.
3. Farokhi F., Johansson K.H. A game-theoretic framework for studying truck platooning incentives // 16th international IEEE conference on intelligent transportation systems (ITSC 2013). IEEE. 2013. P. 1253–1260.
4. Thai J., Laurent-Brouty N., Bayen A.M. Negative externalities of GPS-enabled routing applications: A game theoretical approach // 2016 IEEE 19th international conference on intelligent transportation systems (ITSC). IEEE. 2019. P. 595–601.
5. Acemoglu D., Makhdoumi A., Malekian A., Ozdaglar A. Informational Braess' paradox: The effect of information on traffic congestion // Operations Research. 2018. Vol. 66, No. 4. P. 893–917.
6. Rosental R.W. A class of Games Posessing Pure Strategy Nash Equilibria // International Journal of Game Theory, Vol. 2. 1973. P. 65–67.
7. Мазалов В.В., Чиркова Ю.В. Сетевые игры. С.Пб.: Лань, 2018. 320 с.