УДК 519.83

Управление структурой взаимодействия в играх с линейным наилучшим ответом

И.В. Петров
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: ivpetrov@ipu.ru

Ключевые слова: теоретико-игровые модели, сетевые модели, равновесие Нэша, линейные системы.

Аннотация: В работе исследуется теоретико-игровая модель взаимодействия экономических агентов на сети, в которой агенты стратегически выбирают свои действия, основываясь на действиях своих соседей. Примеры включают сети сотрудничества в области НИОКР, преступные сети, образовательные процессы и многие другие. Интерес представляет сравнительный анализ различных задач управления – или интервенций – в этом контексте. С этой целью рассмотрена теоретико-игровая модель из класса игр с линейным наилучшим ответом, также называемая линейно-квадратичной игрой на сети. В центре внимания находится управление структурой взаимодействия, т. е. элементами матрицы взаимодействия. Для противопоставления эффективности различных подходов к управлению, рассмотрена задача противоборства двух центров, преследующих противоположные цели.

Пусть имеется множество агентов, соединенных сетью. Каждый участник i выбирает некоторое неотрицательное действие $a_i \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ и получает выигрыш v_i от принятого решения. Агенты стремятся максимизировать собственный выигрыш, для чего на каждом шаге взаимодействия им необходимо наилучшим образом отвечать на действия соседей $a_{-i} = (a_j)_{j \neq i}$:

$$BR_i(a_{-i}) = \underset{a_i}{\operatorname{argmax}}\, v_i(a_i, z_i(a_{-i}), b_i). \tag{1}$$

Функция $BR_i(a_{-i})$ носит название функции наилучших ответов игроков (англ. best response/reply function): она не зависит от действий самого игрока i и является его оптимальным ответом на действия других участников. В играх с линейным наилучшим ответом эта функция линейно зависит от окружения игрока i, $z_i(a_{-i})$. В данный момент распространена следующая классификация функций окружения игрока: локальное агрегирование (англ. local aggregate) $z_i(a_{-i}) = \sum_j g_{ij} a_j$, и локальное усреднение (англ. local average), $z_i(a_{-i}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{g_{ij}}{d_i} a_j$. Как показано в работе [1], модели локального агрегирования и усреднения различны как с точки зрения свойств функции выигрышей, так и в сравнительной статике и решений задач управления.

В качестве примера рассмотрим т.н. линейно-квадратичную игру на сети (англ.

linear quadratic network game) [2]:

$$v_i = a_i(b_i + \beta \sum_j g_{ij} a_j) - \frac{a_i^2}{2} \tag{2}$$

Выигрыш игрока в данной модели включает выгоду от собственного действия, $a_i b_i$, и действий соседей, $\beta \sum_j g_{ij} a_j a_i$, а также квадратичные издержки от принятого решения, $a_i^2/2$. Параметр $b_i \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ является предельным выигрышем игрока i, независящим от действий соседей (англ. standalone marginal return). Матрица $\{g_{ij}\} = G \in \{0,1\}^{N \times N}$ – матрица связей между агентами. Параметр β отражает характер зависимости от действий соседей по сети: при $\beta > 0$ действия игроков комплементарны (англ. strategic complements), а при $\beta < 0$ действия соседей взаимозаменяют друг друга (англ. strategic substitutes).

Равновесие Нэша в такой игре – решение системы линейных уравнений, являющихся наилучшими ответами игроков. В случае линейно-квадратичной игры условия первого порядка

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_i} = b_i + \beta \sum_j g_{ij} a_j - a_i = 0 \tag{3}$$

приводят к следующим функциям наилучшего ответа:

$$BR_i(a_{-i}) = b_i + \beta \sum_j g_{ij} a_j \tag{4}$$

или в матричном виде $(I - \beta G)a = b$, где I – единичная матрица. Если $\beta \lambda_{max}(G) < 1$, то равновесие Нэша существует и единственно: равновесные ответы игроков в матричном виде

$$a^* = (I - \beta G)^{-1} b \tag{5}$$

В работе [3] была предложена следующая постановка задачи управления: центральный планировщик стремится максимизировать функцию общественного благосостояния (англ. social welfare function) следующего вида:

$$W = \sum_i U_i(a^*) \longrightarrow \max_b \tag{6}$$

т.е. сумму выигрышей, полученных игроками в равновесии. Тогда задача управления стимулами игроков (или задача стимулирования, англ. incentive-targeting problem) заключается в том, чтобы выбором допустимого управления максимизировать функцию общественного благосостояния по вектору b.

Рассмотрим случай, когда все агенты неразличимы: имеют одинаковый предельный выигрыш $b_i = b$ и связаны эквивалентно, $g_{ij} = p$: В такой постановке сетевая структура полностью соответствует модели случайного графа Эрдеша-Реньи с вероятностью связи между вершинами p. Воспользовавшись результатами [4], представим исходную игру в виде игры на графовых функциях, где в качестве сети взаимодействия используется ее предельный объект. Модели Эрдеша-Реньи соответствует константная графовая функция $\mathcal{W}(x, y) = p$ [5], а выражение 4 может быть переписано в виде

$$\overline{BR} = b + \overline{a}\beta p, \tag{7}$$

где все переменные являются скалярными, а $\overline{a}$ представляет собой одного, репрезентативного агента для всей игры на сети. Равновесным действием такого агента будет

$$\overline{a}^* = \frac{b}{1 - \beta p}. \tag{8}$$

В работе показано, что, в отличии от структурного управления, эффективность решения задачи стимулирования не зависит от величины сетевого эффекта β и пропорциональна имеющемуся бюджету: в явном виде найдено значение сетевого эффекта β^*, выше которого эффективность структурного управления превышает эффективность целевых трансфертов.

Кроме того, с целью противопоставления эффективности различных подходов, рассмотрена задача противоборства двух центров, преследующих противоположные цели. Оба центра одновременно получают информацию о равновесных ответах игроков. Один из центров, обладая некоторым бюджетом, стремится изменить функцию общественного благосостояния W посредством изменения целевых трансфертов, а второй центр стремиться воспрепятствовать этому посредством изменения структуры связей. Найдены оптимальные ответы центров в задаче противодействия, а также области значений параметров игры, в которой затраты на противоборство посредством изменения структуры сети соотносятся с затратами на целевые трансферты [6].

Список литературы

1. Ushchev P., Zenou Y. Social norms in networks // Journal of Economic Theory. 2020. Vol. 185. P. 104969
2. Ballester C., Calvo-Armengol A., Zenou Y. Who's who in networks. Wanted: The key player // Econometrica. 2006. Vol. 74, No. 5. P. 1403–1417.
3. Galeotti A., Golub B., Goyal S. Targeting interventions in networks // Econometrica. 2020. Vol. 88, No. 6. P. 2445–2471.
4. Parise F., Ozdaglar A. Graphon games: A statistical framework for network games and interventions // Econometrica. 2023. Vol. 91, No. 1. P. 191–225.
5. Lovasz L. Large networks and graph limits. Vol. 60. American Mathematical Soc., 2012. P. 487.
6. Petrov I. Structural Interventions in Linear Best-Response Games on Random Graphs // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56, No. 2. P. 2830–2833.