УДК 519.816

КРИТЕРИИ ДИСКРЕТНОГО ВЫБОРА В ЗАДАЧЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Г.А. Тимофеева
Уральский государственный университет путей сообщения
Россия, 620034, Екатеринбург, Колмогорова, 66
E-mail: Gtimofeeva@usurt.ru

Ключевые слова: выбор решения, вероятностный критерий, квантильный критерий, игра с природой, стохастическая оптимизация.

Аннотация: Исследуются критерии выбора решений лицом, принимающим решения, в условиях, когда результат выбора альтернативы описывается непрерывно распределенной случайной величиной. Такие задачи возникают в том числе, в задачах со случайным вторым игроком, когда в качестве второго игрока выступает множество лиц, каждый из которых выбирает решение в соответствии со своими предпочтениями. Анализируются известные подходы к выбору решения: стохастическое доминирование, квантильный и вероятностный критерии. Предлагается параметрическая модификация вероятностного критерия и квантильного критерия. Применение подхода показано на примере, полученном при исследовании задачи выбора стратегий транспортной компании по развитию сервиса и программ лояльности для клиентов.

Модели выбора оптимальных решений в задачах со случайной целевой функцией используются при описании разнообразных прикладных задач. Кроме наиболее традиционного критерия – среднего значения целевой функции используются также (в теории риска, теории принятия решений) стохастическое доминирование 1-го, 2-го и более высоких порядков [1], стохастическое последование (в теории игр), квантильный и вероятностный критерии – в теории стохастического программирования [2].

Задачи выбора из конечного множества решений, в условиях, когда результат выбора описывется случайной величиной (дискретной или непрерывной), исследуются в различных постановках при выборе стратегий в «игре с природой». Если второй игрок представлен значительным множеством лиц, принимающих решения в зависимости от своих предпочтений, то игра формализуется, как игра со случайным вторым игроком [3].

Несморя на длительную историю исследований, конкретные прикладные задачи требуют уточнения и развития перечисленных подходов, например, с помощью сравнительного анализа гистограмм [4]. Исследование результатов имитационного моделирования в задаче выбора стратегий перевозчиком [5] также потребовало уточнения существующих подходов к выбору решения в задачах со случайной целевой функцией.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу выбора оптимальной стратегии из конечного множества альтернатив в условиях, когда результат выбора стратегии (решения) описывается нормально распределенной случайной величиной. Пусть ЛПР выбирает решение из множества $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$, желая максимизировать результат выбора, который описывается нормально распределенной случайной величиной $\xi(u_i)$ с параметрами m_i, σ_i:

$$\xi(u_i) \sim N(m_i, \sigma_i), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

Такая формализация широко используется в теории анализа риска инвестиционных проектов. При сравнении случайных величин, описывающих результаты инвестирования, используется понятие стохастического доминирования 2-го порядка, а также сравнение моментов первого и второго порядка (доходности и риска) и другие подходы [1].

Определение 1. $[1, 4]$ *Случайная величина ξ стохастически (2-го порядка) доминирует над η, что обозначается $\xi \succeq_2 \eta$, если*

$$\tilde{F}_\xi(x) \leqslant \tilde{F}_\eta(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^1, \quad \text{где} \quad \tilde{F}_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} F_\xi(x)dx, \tag{2}$$

$F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ.

Доминирование строгое $\xi \succ_2 \eta$, если неравенство (2) *является строгим на множестве ненулевой меры.*

Утверждение 1. [1] *Для нормально распределенных случайных величин доминирование второго порядка $\xi \succ_2 \eta$ эквивалентно соотношению:*

$$a_1 \geqslant a_2, \quad s_1 \leqslant s_2,$$

причем хотя бы одно из неравенств – строгое.

В соотвествии с риск-ориентированным подходом следует отбросить решения доминируемые в смысле порядка $\succ_2$, как заведомо неоптимальные. Оставшиеся элементы множества решений можно упорядочить по возрастанию средних ожидаемых значений. Получим множество стратегий $U_l = \{u_1, \ldots, u_l\} \subseteq U$:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_l, \quad s_1 < s_2 < \ldots < s_l. \tag{3}$$

Все неравенства в (3) строгие, иначе одна из стратегий доминируемая.

Как правило, остается целый набор альтернатив, выбор предпочтительного варианта требует рассмотрения других критериев.

2. Критерии выбора оптимального решения

Очевидно, что решение u_l оптимально по критерию максимума среднего значения:

$$l = arg \max_i E(\xi(u_i)). \tag{4}$$

Рассмотрим другие критерии выбора стратегии, такие как квантильный и вероятностный критерии.

Квантильный критерий состоит в нахождении максимума уровня целевой функции, получаемого с заданной вероятностью $\alpha > 0.5$:

$$q_i(\alpha) \to \max_i, \quad \text{где} \quad q_i(\alpha) : \mathcal{P}\{\xi(u_i) \geqslant q_i(\alpha)\} \geqslant \alpha. \tag{5}$$

Вероятностный критерий состоит в нахождении максимума вероятности получить заданный уровень b

$$P_i(b) \to \max_i, \quad P_i(b) = \mathcal{P}\{\xi(u_i) \geqslant b\}. \tag{6}$$

С прикладной точки зрения, выбор стратегии на основе теории риска и стохастического доминирования 2-го порядка часто оказывается неэффективным при рассмотрении конкретных стратегий. С другой стороны, применение критериев (5) и (6) требует задания вероятности α и(ли) выбора ЛПР желаемого уровня b.

3. Параметрические вероятностный и квантильный критерии

Перейдем от рассмотрения задач с квантильным и вероятностным критерием при фиксированном значении параметров к параметрическим задачам. Рассмотрим параметрическую задачу с квантильным критерием

$$J(\alpha) = Arg\max_i q_i(\alpha), \quad q_i(\alpha) : \mathcal{P}\{\xi(u_i) \geqslant q_i(\alpha)\} \geqslant \alpha. \tag{7}$$

Аналогично от вероятностного критерия с фиксированным уровнем b перейдем к параметрическому вероятностному критерию

$$I(b) = Arg\max_i P_i(b), \quad P_i(b) = \mathcal{P}\{\xi(u_i) \geqslant b\}. \tag{8}$$

Кроме того, найдем функции максимума вероятности

$$R(b) = \max_i P_i(b), \quad P_i(b) = \mathcal{P}\{\xi(u_i) \geqslant b\}. \tag{9}$$

и оптимальной квантили

$$Q(\alpha) = \max_i q_i(\alpha), \quad J(\alpha) = Arg\max_i q_i(\alpha), \quad q_i(\alpha) : \mathcal{P}\{\xi(u_i) \geqslant q_i(\alpha)\} \geqslant \alpha. \tag{10}$$

Из свойств функций вероятности и квантили [2] получаем, что решения задач (9) и (10) также связаны.

Утверждение 2. *Функции $Q(\alpha) : (0;1) \mapsto \mathbb{R}^1$ и $R(b) : \mathbb{R}^1 \mapsto (0;1)$ взаимно обратны, то есть $Q(R(b)) \equiv b$.*

Отбор оптимальных стратегий будем производить в два этапа:

1)отбросим стратегии $u_j \in U$ стохастически доминируемые (2-го порядка). Оставшиеся стратегии упорядочиваем по возрастанию средних ожидаемых значений. Получим множество стратегий $U_l = \{u_1, \dots, u_l\} \subseteq U$ для которых выполняются неравенства (3).

2) Используя соотношения (7), (9) строим функции $J(\alpha)$ и $Q(\alpha)$ для $\alpha \in$ $[0.5; 0.999]$. Возможно взять другие интервалы, например, $\alpha \in [0.9; 1 - 10^k]$ для задач, связанных обеспечением надежности систем.

Затем рассчитываем $I(b)$ – решение задачи (8) для соотвествующих значений $b \in [Q(0.5); Q(0.99)]$. Функции $J(\alpha)$ и $Q(\alpha)$, а также $I(b)$ и $R(b)$ представляем ЛПР для выбора стратегии.

Пример 1. *Рассмотрим модельный пример, аналогичный результатам имитационного моделирования, полученным при анализе конкретных стратегий транспорной компании по прилечению клиентов* [5].

Пусть множество возможных альтернатив представлено тремя элементами $U = \{u_1, u_2, u_3\}$. *Результат выбора стратегии* u_i *описывается нормально распределенной случайной величиной* $\xi(u_i)$, *параметры распределения которой заданы*

$$\xi(u_1) = \xi_1 \sim N(1.3, 0.2), \quad \xi(u_2) = \xi_2 \sim N(1.5, 0.3), \quad \xi(u_3) = \xi_3 \sim N(1.7, 0.5). \tag{11}$$

С точки зрения доминирования 2-го порядка рассматриваемые стратегии несравнимы, т.е. среди них нет доминируемых в смысле $\succ_2$, решения уже упорядочены по возрастанию математических ожиданий.

Использование квантильного критерия требует задания вероятности, например, при вероятности $\alpha = 0.9$ решение задачи (5) достигается при $i = 3$, но при $\alpha = 0.8$ решение задачи (6) достигается на $i = 2$.

Проблема применения вероятностного критерия (6) состоит в необходимости выбора уровня b, обоснование этого выбора является отдельной задачей. Отметим, что в данном примере при $b = 1.1$ максимум вероятности в задаче (6) достигается на второй альтернативе, а при $b = 1.5$ на 3-ей.

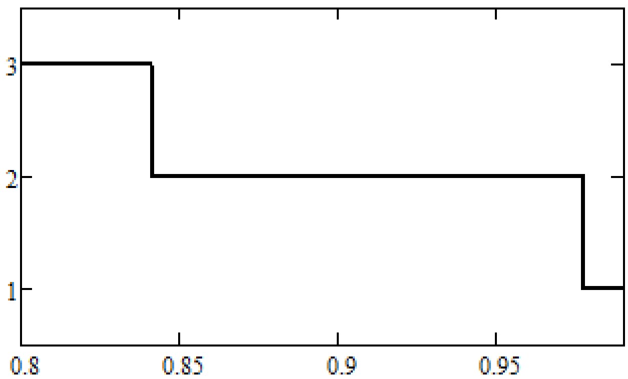

Рис. 1. График функции $J(\alpha)$ – решения задачи (7), (11). По горизонтальной оси – вероятность α, по вертикальной – номер оптимального решения

Будем использовать параметрический квантильный критерий (10). Вычисление функции оптимальной квантили $J(\alpha)$ дает следующий результат:

$$J(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha < 0.8413 \\ 2, \text{ если } 0.8413 \leqslant \alpha \leqslant 0.9782 \\ 3, \text{ если } \alpha > 0.9782 \end{cases}.$$

График функции представлен на Рис. 1. По графику видно, что для большинства разумных значений вероятности оптимальным решением является u_2. Кроме того, анализ графиков квантилей $q_i(\alpha)$ и оптимальной квантили $Q(\alpha)$ показывает, что выигрыш от перехода от u_2 к u_3 при значения вероятности, близких к единице ($\alpha \in\ [0.9782; 0.999]$) при которых u_3 оптимально, небольшой (см. Рис. 2).

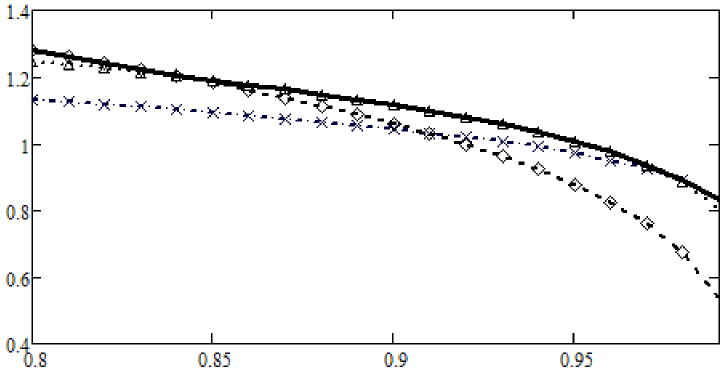

Рис. 2. График оптимального значения квантили $Q(\alpha)$ (сплошная линия) для данных Примера 1. Линии с маркерами соотвествуют различным решениям: $\cdots\diamond\cdots$ – график $q_1(\alpha)$, $\cdots\triangle\cdots$ – график $q_2(\alpha)$, $\cdots\times\cdots$ – график $q_3(\alpha)$

Таким образом, получение параметрического решения задачи квантильной оптимизации в данном примере дает больше информации для выбора решения ЛПР.

4. Заключение

В статье проанализированы подходы и критерии выбора стратегии в случае, когда результат выбора описывается нормально распределенной случайной величиной. Предложено использовать параметрический кваннтильный критерий для поддержки принятия решения ЛПР. Рассмотрен модельный пример.

Список литературы

1. Ватник П.А. Теория риска. С.-Пб.: СПбГИЭУ, 2009. 156 с.
2. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
3. Тимофеева Г.А., Завалищин Д.С. Игра со случайным вторым игроком и ее приложение к задаче о выборе цены проезда // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 170–180.
4. Лепский А.Е. Стохастическое и нечеткое упорядочивание методом минимальных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2017. № 1. С. 59—79.
5. Тимофеева Г.А., Хазимуллин А.Д. Анализ стратегий по привлечению клиентов транспортно-логистических услуг холдинга «РЖД» с учетом дифференциации клиентов // Вестник УрГУПС. 2023. № 1(57). С. 64-72.