УДК 19.711.7

АНАЛИЗ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ НА ДОРОЖНОМ ГРАФЕ ПЕТРОЗАВОДСКА

Ю.В. Чиркова
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН
Россия, 185910, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
E-mail: julia@krc.karelia.ru

Ключевые слова: Равновесие по Вардропу, оптимум, транспортный граф, цена анархии.

Аннотация: В докладе подробно описывается математическая модель задач нахождения равновесных и оптимальных транспортных потоков на дорожном графе для заданной матрицы корреспонденций. Приводится описание алгоритма численного решения задач. Дается анализ результатов численных экспериментов по нахождению и сравнению равновесных и оптимальных для системы распределений транспортных потоков для текущего состояния дорожного графа и проектируемого с реконструкцией участка на улице Достоевского между улицами Зайцева и Боровой и строительством тоннеля под железнодорожными путями к улице Халтурина.

1. Модель Вардропа маршрутизации транспортных потоков

Задача оптимальной маршрутизации трафика рассматривается как игра на ориентированном транспортном графе $G = (V, E)$. Дугами графа являются дороги, а вершинами – перекрестки или пункты существенного изменения характеристик дороги. Вершины $v \in V$ транспортного графа являются исходными, промежуточными и конечными пунктами для транспортных потоков. $n = |V|$ – число вершин транспортного графа. Для каждой дуги $e = (i, j) \in E$, соединяющей вершины $i, i \in V$, задана ее пропускная способность c_e и время t_e проезда по ней транспортного средства при отсутствии других транспортных средств. Путем или маршрутом, соединяющем вершины i, j на графе G называется последовательность дуг $e_1 = (i, k_1), e_2 = (k_1, k_2), \ldots, e_m = (k_m, j)$. Рассмативаются простые маршруты без петель и циклов.

Матрица корреспонденций $Corr[n \times n]$ определяет объемы транспортных потоков между парами вершин, где каждый элемент i, j означает, что из вершины i в вершину j отправляется поток трафика объемом $Corr_{ij}$ единиц по маршрутам на графе G. Обозначим множество всех потокообразующих пар $W = \{w = (i, j) | Corr_{ij} > 0\}$. Обозначим P_w – множество доступных для использования маршрутов для пары $w \in W$. Тогда $P = \cup_{w \in W} P_w$ – множество всех путей в графе. Трафик каждой пары

$w = (i, j)$ распределяется по маршрутам P_w, таким образом, что $\sum\limits_{rinP_w} x_r^w = Corr_{ij}$, где $x_r^w \geqslant 0$ – часть трафика пары w, направляемая по пути r. В этом случае $x = \{x_{r \in P_w}^{w \in W}\}$ образует допустимый профиль или допустимое распределение транспортных потоков в транспортном графе G согласно заданной матрице корреспонденций $Corr$.

Для каждой из дуг $e \in E$ определяется его загрузка (весь следующий по ней трафик):

$$\delta_e(x) = \sum_w \sum_{r \in P_w : e \in r} x_r^w.$$

Задержка трафика на дуге e определяется как BPR-функция (Bureau of Public Road) [1] $f_e(x) = t_e \left(1 + \mu \left(\frac{\delta_e(x)}{c_e}\right)^\alpha\right)$, где μ и α – некоторые положительные константы. Тогда задержка при движении трафика по маршруту r равна $G_r(x) = \sum_{e \in r} f_e(x)$.

Определение 1. *Профиль x называется равновесием по Вардропу, если для каждой потокообразующей пары $w \in W$ и любых маршрутов $r, q \in P_w$ из $x_r^w > 0$ следует $G_r(x) \leqslant G_q(x)$.*

Задача нахождения равновесия по Вардропу в рассматриваемой модели является потенциальной [2], то есть равновесное решение соответствует минимуму выпуклой потенциальной функции

$$F(x) = \sum_{e \in E} \int\limits_0^{\delta_e(x)} f_e(z) dz = \sum_{e \in E} t_e \delta_e(x) \left(1 + \frac{\mu}{\alpha + 1} \left(\frac{\delta_e(x)}{c_e}\right)^\alpha\right),$$

что гарантирует его существование и единственность.

Затраты системы определяются как

$$SC(x) = \sum_{e \in E} t_e \delta_e(x) \left(1 + \mu \left(\frac{\delta_e(x)}{c_e}\right)^\alpha\right).$$

Определение 2. *Профиль x является оптимальным для системы, если он обеспечивает минимум затрат системы $SC(x)$.*

Так как функция затрат системы является выпуклой, то существует единственный оптимальный для системы профиль распределения трафика по путям транспортного графа.

Определим маргинальные задержки трафика на дуге e как $f_e^*(x) = t_e \delta_e(x) \left(1 + \mu(\alpha + 1) \left(\frac{\delta_e(x)}{c_e}\right)^\alpha\right)$.

Тогда маргинальные задержки на маршруте r определяются как $G_r^*(x) = \sum_{e \in r} f_e^*(x)$.

Для выпуклой функции затрат системы справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. *Профиль x является оптимальным для системы, если для каждой потокообразующей пары $w \in W$ и любых маршрутов $r, q \in P_w$ из $x_r^w > 0$ следует $G_r^*(x) \leqslant G_q^*(x)$.*

Ценой анархии в данном случае является отношение затрат системы для равновесного профиля к оптимальным затратам системы. Цена анархии показывает, насколько равновесное решение хуже оптимального для системы.

2. Численные эксперименты

Для численного нахождения равновесного и оптимального решений задачи распределения трафика по маршрутам транспортной сети подходит метод проекции градиента с генерацией маршрутов, основанный на идеях, предложенных в работах [3, 4]. В случае нахождения равновесия минимизируется значение потенциальной функции $F(x)$, при этом в равновесии на используемых маршрутах задержки $G_r(x)$ минимальны. В случае поиска оптимума затрат системы минимизируется значение затрат системы $SC(x)$, при этом в оптимальном решении на используемых маршрутах маргинальные задержки $G^*(x)$ минимальны. Поэтому алгоритм решения в обоих случаях одинаков.

Для построения основы модели транспортной сети города Петрозаводск использовалась уточненная версия дорожного графа, описанного в работе [6], исходные данные для которого представлены OpenStreetMap – некоммерческом проектом, нацеленным на создание бесплатной географической карты мира силами Интернет-пользователей. Анализируемая версия графа содержит 1520 вершин, соединенных 3739 дугами. Матрица корреспонденций построена на основе гравитационной модели с учетом числа проживающих и числа организаций в окрестностях вершин. Матрица представляет объемы потоков для 337470 потокообразующих пар вершин.

В качестве констант в BPR-функциях задержки были взяты значения $\alpha = 4$ и $\mu = 0.15$, обычно устанавливаемые в подобных моделях [7, 8] городского транспорта.

Были выполнены эксперименты по расчету равновесного по Вардропу и оптимального распределения транспортных потоков на дорожном графе города.

По данным Министерства транспорта Республики Карелия [9] планируется реконструкция участка на улице Достоевского между улицами Зайцева и Боровой. Проект подразумевает строительство тоннеля под железнодорожными путями к улице Халтурина. Данные изменения были учтены в новой версии дорожного графа, для которой также были сделаны расчеты равновесия и оптимума.

2.1. Текущее состояние системы

Найдено равновесное по Вардропу распределение транспортных потоков для текущего состояния дорожного графа. Транспортные потоки между потокообразующими парами вершин в равновесии распределяются между 730373 маршрутами. Затраты системы в равновесии равны 34008.152.

Для анализа задержки на путях в равновесии мы изучаем распределение относительной задержки на маршрутах. В равновесии для каждой из потокообразующих пар задержки на всех связывающих их маршрутах равны между собой. Такую задержку для каждой из пар назовем равновесной задержкой на пути между парами. Для нормировки задержки для каждой пары будем использовать величину, равную задержке на кратчайшем пути между вершинами данной пары при нулевых значениях всех транспортных потоков в сети. Данную величину назовем расстоянием между вершинами пары. Тогда относительная равновесная задержка для пары – это отношение равновесной задержки для пары к расстоянию между вершинами пары. В найденном равновесии такие задержки распределяются на интервале от 1 до 10 с убывающей плотностью.

В оптимальном профиле транспортные потоки распределяются между 416256 маршрутами. Затраты системы равны 33507.486. Тогда цена анархии для текущей системы равна 1.015, то есть достаточно близко к 1, что является хорошим результатом, учитывая, что максимально возможное значение цены анархии для таких систем равно 1.333.

В отличие от равновесия в оптимальном для системы профиле для каждой из потокообразующих пар задержки на всех связывающих их маршрутах могут отличаться между собой. Поэтому для оценки задержки между вершинами в паре мы используем средневзвешенное значение задержки, равное сумме задержек по каждому из маршрутов, связывающих пару вершин, умноженных на долю потока пары на данном маршруте. Такую задержку для каждой из пар назовем средней оптимальной задержкой на пути между парами. Тогда относительная оптимальная задержка для пары – это отношение средней оптимальной задержки для пары к расстоянию между вершинами пары. По сравнению с равновесием наибольшие относительные задержки уменьшились и снизилась частота их появления.

2.2. Проектируемое состояние системы

Аналогичные исследования были проведены для транспортной системы города, в которой реализован проект по реконструкции участка ул. Достоевского с постройкой тоннеля под железной дорогой, связывающего ул. Достоевского и ул. Халтурина.

Транспортные потоки в равновесии распределяются между 681289 маршрутами. Затраты системы в равновесии равны 32703.433, то есть значительно меньше, чем в равновесии (и даже меньше, чем в оптимальном профиле) в системе без тоннеля.

В оптимальном профиле транспортные потоки распределяются между 398466 маршрутами. Затраты системы равны 32265.316. Тогда цена анархии для проектируемой системы равна 1.014, то есть меньше, чем для текущего состояния системы.

По сравнению с равновесием наибольшие относительные задержки уменьшились и снизилась частота их попадания в область значений более 5.

2.3. Сравнение задержек в равновесиях

Сравним, как изменятся задержки на дугах транспортного графа в равновесии при введении в эксплуатацию тоннеля.

Таблица 1. Участки улиц с существенным изменением задержки в равновесии после реконструкции ул. Достоевского с постройкой тоннеля

Задержка уменьшится		Задержка увеличится	
отношение	участок на улице	отношение	участок на улице
3.784	Муезерская	4.225	Халтурина
1.930	Ветеринарный переулок	1.314	Соломенское шоссе
1.712	Краснофлотская	1.238	Ровио
1.646	Новосулажгорская	1.225	Советская
1.529	Мурманская	1.302	Первомайский проспект
1.510	Пограничная	1.147	Шотмана

В таблице 1 указаны участки улиц, на которых произойдут наиболее существенные изменения. В первой и третьей колонках указано, до скольки раз уменьшится или увеличится на данном участке улицы величина задержки в равновесии в системе с тоннелем по сравнению с равновесием в системе без тоннеля.

3. Заключение

В ходе выполнения исследования разработана и реализована программная система для нахождения и визуализации равновесного и оптимального распределения транспортных потоков. Проведены численные эксперименты для текущего состояния дорожного графа и проектируемого с реконструкцией участка на улице Достоевского между улицами Зайцева и Боровой и строительством тоннеля под железнодорожными путями к улице Халтурина. Эксперименты подтверждают целесообразность выполнения проектной реконструкции, так как равновесие в системе с тоннелем оказывается по величине затрат системы лучше оптимального профиля в системе без тоннеля.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-20015, проводимого совместно с органами власти Республики Карелия с финансированием из Фонда венчурных инвестиций Республики Карелия (ФВИ РК), https://rscf.ru/project/22-11-20015/.

Список литературы

1. U.S. Bureau of Public Roads. Traffic Assignment Manual, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., 1964.
2. Мазалов В.В. Чиркова Ю.В. Сетевые игры. Лань, 2018. 320 с.
3. Leventhal T., Nemhauser G., Trotter L.J. A column generation algorithm for optimal traffic assignment // Transp. Sci. 1973. Vol. 7, No. 2. P. 168–176.
4. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / Под ред. Гасникова А.В. М.: МЦНМО, 2013. 196 с.
5. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. 1986.
6. Ermolin N.A. et al. Modeling of the City's Transport Network Using Game-Theoretic Methods on the Example of Petrozavodsk // Contributions to Game Theory and Management. 2022. Vol. 15. P. 18-31.
7. Sheffi Y. Urban transportation networks: Equilibrium analysis with mathematical programming methods. Prentice-Hall, Inc. 1985.
8. Mtoi E., Moses R. Calibration and Evaluation of Link Congestion Functions: Applying Intrinsic Sensitivity of Link Speed as a Practical Consideration to Heterogeneous Facility Types within Urban Network // Journal of Transportation Technologies. 2014. Vol. 4. P. 141-149.
9. Тоннель под железнодорожными путями может появиться в Петрозаводске: [Электронный ресурс] // Республика. URL: https://rk.karelia.ru/social/eshhe-odin-tonnel-pod-zheleznodorozhnymi-putyami-mozhet-poyavitsya-v-petrozavodske/. (Дата обращения: 28.11.2023).