УДК 681.51

ИДЕНТИФИКАЦИОННЫЙ ПОДХОД К АДАПТИВНОМУ УПРАВЛЕНИЮ ПО СОСТОЯНИЮ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

К.А. Ласточкин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: lastconst@yandex.ru

Ключевые слова: адаптивное управление, идентификация, устойчивость.

Аннотация: Для класса нелинейных аффинных по управлению систем предложен идентификационный подход к решению задачи адаптивного управления. В отличие от классического адаптивного управления устойчивость замкнутой системы достигается только при сходимости настраиваемых параметров к истинным значениям. Теоретические результаты сопровождены моделированием.

1. Введение

Адаптивная система управления – это система, позволяющая за счет изменения параметров управляющего воздействия на основе приобретаемой в процессе функционирования объекта информации достигать требуемого качества управления в условиях априорной неопределенности.

Рассмотрим формализацию задачи синтеза адаптивного управления системой

(1) $$\dot{x}(t) = F(x, u, \theta), \; x(t_0) = x_0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – управление, $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ – вектор неизвестных параметров, $F\colon \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n_x}$ – отображение такое, что решение уравнения (1) существует и продолжимо вправо.

Цель управления системой (1) заключается в обеспечении выполнения условия:

(2) $$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x^*\| = 0,$$

где x^* – положение равновесия.

Предполагается, что для (1) существует и известно идеальное управление

(3) $$u^*(t) = v(x, \theta),$$

такое, что в замкнутой системе:

$$\dot{x}(t) = F(x, v(x, \theta), \theta)$$

выполнено условие (2).

Существование (3) позволяет сформулировать задачу адаптивного управления системой (1), как определение правой части уравнения адаптера

(4) $$\dot{\hat{\theta}}(t) = w\left(x, \hat{\theta}\right)$$

таким образом, что закон управления:

(5) $$u(t) = v\left(x, \hat{\theta}\right)$$

гарантирует выполнение целевого условия (2).

Интуитивно ясно, что алгоритм адаптации (4) обеспечивает достижение поставленной цели, если выполнено условие $\hat{\theta}(t) \to \theta$ при $t \to \infty$. Однако, как широко известно [1], в стандартных решениях для достижения цели (2) оценки $\hat{\theta}(t)$ совершенно необязательно должны сходится к истинным значениям θ, а регулятор:

$$u(t) = v\left(x, \hat{\theta}_\infty\right),$$

где $\hat{\theta}_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \hat{\theta}(t)$, в общем случае, не является даже стабилизирующим.

Устранение выявленного противоречия между человеческой интуицией и свойствами существующих алгоритмов адаптивного управления мотивирует разработку концепции идентификационного подхода к адаптивному управлению.

Определение 1. *Системой идентификационного адаптивного управления (или просто идентификационного управления) будем называть систему, состоящую из таких законов управления* (5) *и адаптации* (4)*, что решение задачи* (2) *следует из выполнения условия $\hat{\theta}(t) \to \theta$ при $t \to \infty$.*

Цель этой работы заключается в разработке обобщенного идентификационного метода адаптивного управления по состоянию нелинейными системами.

2. Постановка задачи

Рассмотрим класс нелинейных систем (1) со следующей правой частью:

(6) $$F(x, u, \theta) := f(x, \theta) + g(x, \theta)\, u(t) = \Phi^{\mathrm{T}}(x, u)\, \theta,\; x(t_0) = x_0,$$

где $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_\Theta} \mapsto \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_\Theta} \mapsto \mathbb{R}^n$, $\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n_\theta \times n}$ – известны.

Относительно x^* и управления $u(t)$ системы (6) принимается следующее допущение.

Допущение 1. *Существует непрерывная по всем аргументам функция $u^*(t) = v(x, \kappa(\theta))$, такая, что замкнутая система*

$$\dot{x}(t) = \Phi^{\mathrm{T}}(x, u^*)\, \theta \colon = f_*(x)$$

имеет глобально асимптотически устойчивое положение равновесия x^*.

В свою очередь относительно вектора параметров управления $\kappa(\theta) \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$ принимается следующее допущение.

Допущение 2. *Существуют отображения* $\mathcal{G}\colon \mathbb{R}^{n_\theta} \to \mathbb{R}^{n_\kappa \times n_\kappa}$, $\mathcal{S}\colon \mathbb{R}^{n_\theta} \to \mathbb{R}^{n_\kappa}$, *такие, что для всех* $\Delta(t) \in \mathbb{R}$ *верно:*

$$\begin{array}{c}\mathcal{S}(\theta) = \mathcal{G}(\theta)\,\kappa(\theta),\\ \Pi_\kappa(\Delta)\,\mathcal{G}(\theta) = \mathcal{T}_\mathcal{G}(\Xi_\mathcal{G}(\Delta)\,\theta),\\ \Pi_\kappa(\Delta)\,\mathcal{S}(\theta) = \mathcal{T}_\mathcal{S}(\Xi_\mathcal{S}(\Delta)\,\theta),\end{array} \tag{7}$$

где $\mathcal{T}_\mathcal{G}\colon \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{G}} \to \mathbb{R}^{n_\kappa \times n_\kappa}$, $\mathcal{T}_\mathcal{S}\colon \mathbb{R}^{\Delta_\mathcal{S}} \to \mathbb{R}^{n_\kappa}$,

$$\begin{array}{l} det\left\{\Pi_\kappa(\Delta)\right\} \geqslant \Delta^{\ell_\kappa}(t),\ \ell_\kappa \geqslant 1,\ rank\left\{\mathcal{G}(\theta)\right\} = n_\kappa,\\ \Xi_{(.)}(\Delta) = \overline{\Xi}_{(.)}(\Delta)\,\Delta(t) \in \mathbb{R}^{\Delta_{(.)}\times n_\kappa},\ \Xi_{(.)_{ij}}(\Delta) = c\Delta^\ell(t),\ c \in \{0,\ 1\},\ \ell > 0,\end{array}$$

и все введенные отображения известны.

Требуется решить задачу идентификационного адаптивного управления, то есть обеспечить существование (2) при $\hat{\theta}(t) \to \theta$.

3. Основной результат

Сформулируем основной результат работы в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Определим сигналы* $\mathcal{Y}_\kappa(t)$ *и* $\mathcal{M}_\kappa(t)$ *следующим образом:*

$$\begin{array}{l}\mathcal{Y}_\kappa(t) = adj\left\{\mathcal{T}_\mathcal{G}\left(\overline{\Xi}_\mathcal{G}(\Delta)\,\mathcal{Y}_\theta\right)\right\}\mathcal{T}_\mathcal{S}\left(\overline{\Xi}_\mathcal{S}(\Delta)\,\mathcal{Y}_\theta\right),\\ \mathcal{M}_\kappa(t) = det\left\{\mathcal{T}_\mathcal{G}\left(\overline{\Xi}_\mathcal{G}(\Delta)\,\mathcal{Y}_\theta\right)\right\},\end{array} \tag{8}$$

$$\begin{array}{l}\Delta(t) = k(t)\cdot det\left\{I_{n_\theta} - \Sigma(t)\right\},\ \mathcal{Y}_\theta(t) = k(t)\cdot adj\left\{I_{n_\theta} - \Sigma(t)\right\}\vartheta(t),\\ \dot{\vartheta}(t) = -\sigma\varphi(t)\left[\varphi^{\mathrm{T}}(t)\,\vartheta(t) - y(t)\right],\ \vartheta(t_0) = 0_{n_\theta},\\ \dot{\Sigma}(t) = -\sigma\varphi(t)\,\varphi^{\mathrm{T}}(t)\,\Sigma(t),\ \Sigma(t_0) = I_{n_\theta\times n_\theta},\end{array}$$

$$\begin{array}{l}y(t) = x(t) - lx_f(t) - x_0e^{-l(t-t_0)},\\ \dot{x}_f(t) = -lx_f(t) + x(t),\ x_f(t_0) = 0_n,\\ \dot{\varphi}(t) = -l\varphi(t) + \Phi(x,u),\ \varphi(t_0) = 0_{n_\theta\times n}.\end{array}$$

где $\sigma > 0,\ l > 0,\ k(t) \geqslant k_{\min} > 0.$

Пусть $\Phi(x,u) \in \mathrm{FE}$, *то есть существуют* $t_e \geqslant t_r^+ \geqslant t_0$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что*

$$\int\limits_{t_r^+}^{t_e} \Phi(x,u)\,\Phi^{\mathrm{T}}(x,u)d\tau \geqslant \alpha I_{n_\theta} > 0, \tag{9}$$

тогда закон управления $u(t) = v(x, \hat{\kappa}(\theta))$ *с законом настройки:*

$$\begin{array}{l}\dot{\hat{\kappa}}(t) = -\frac{\gamma_0}{1+\mathcal{M}_\kappa^2(t)}\mathcal{M}_\kappa(t)\left(\mathcal{M}_\kappa(t)\,\hat{\kappa}(t) - \mathcal{Y}_\kappa(t)\right),\\ \hat{\kappa}(t_0) = \hat{\kappa}_0,\ \gamma_0 > 0,\end{array} \tag{10}$$

для всех $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ *таких, что* $\forall t \geqslant t_0\ x(t) \in D$ *гарантирует* $\hat{\theta}(t) \to \theta$ *при* $t \to \infty$ *и асимптотическую устойчивость положения равновесия* x^* *системы* (1) + (6).

Доказательство теоремы 1. Продифференцировав $\varepsilon(t) = x(t) - lx_f(t)$, имеем $\dot{\varepsilon}(t) = \Phi^{\mathrm{T}}(x,u)\,\theta - l\varepsilon(t),\ \varepsilon(t_0) = x_0$, откуда получаем $y(t) = \varphi^{\mathrm{T}}(t)\,\theta$. Подставив это выражение в определение $\dot{\vartheta}(t)$ и разрешив полученное дифференциальное уравнение, имеем:

$$\vartheta(t) - \theta = \Sigma(t)(\vartheta(t_0) - \theta) \Leftrightarrow \vartheta(t) = (I_{n_\theta} - \Sigma(t))\theta.$$

Умножив функцию $\vartheta(t)$ на $k(t) \cdot adj\{I_{n_\theta} - \Sigma(t)\}$, в силу свойства

$$k(t) \cdot adj\{I_{n_\theta} - \Sigma(t)\}(I_{n_\theta} - \Sigma(t)) = k(t) \cdot det\{I_{n_\theta} - \Sigma(t)\} I_{n_\theta}$$

получаем $\mathcal{Y}_\theta(t) = \Delta(t)\theta$. Воспользовавшись свойством $\Xi_{(.)}(\Delta) = \overline{\Xi}_{(.)}(\Delta)\Delta(t)$ из допущения 2, имеем $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}\left(\overline{\Xi}_{\mathcal{S}}(\Delta)\mathcal{Y}_\theta\right) = \mathcal{T}_{\mathcal{G}}\left(\overline{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_\theta\right)\kappa(\theta)$, что позволяет получить связь сигналов (8) через регрессионное уравнение $\mathcal{Y}_\kappa(t) = \mathcal{M}_\kappa(t)\kappa(\theta)$.

По лемме 6.8 из [2] при выполнении (9) также верно $\varphi \in \mathrm{FE}$. В утверждении 1 из [3] было доказано выполнение $\Delta(t) \geqslant \Delta_{\min} > 0$ для всех $t \geqslant t_e$ при $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$. Из выполнения допущения 2 следует справедливость неравенств:

$$det\{\Pi_\kappa(\Delta)\} \geqslant \Delta^{\ell_\kappa}(t),\ rank\{\mathcal{G}(\theta)\} = n_\kappa,$$

тогда при $\varphi(t) \in \mathrm{FE}$ для регрессора $\mathcal{M}_\kappa(t)$ для всех $t \geqslant t_e$ оказывается верно:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}_\kappa(t)| &= \left|det\left\{\mathcal{T}_{\mathcal{G}}\left(\overline{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_\theta(t)\right)\right\}\right| = |det\{\Pi_\theta(\Delta)\}|\underbrace{|det\{\mathcal{G}(\theta)\}|}_{>0} \geqslant \\ &\geqslant \Delta^{\ell_\kappa}(t)|det\{\mathcal{G}(\theta)\}| > \Delta_{\min}^{l_\kappa}|det\{\mathcal{G}(\theta)\}| = \underline{\mathcal{M}_\kappa} > 0.\end{aligned}$$

Подставив в (1) + (6) закон управления $u(t) = v(x, \hat{\kappa}(t))$, имеем:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x,\theta) + g(x,\theta)v(x,\hat{\kappa}(t)) = \\ &= f(x,\theta) + g(x,\theta)v(x,\hat{\kappa}(t)) \pm g(x,\theta)v(x,\kappa(\theta)) = \\ &= f_*(x) + g(x,\theta)v(x,\tilde{\kappa}+\kappa(\theta)) - g(x,\theta)v(x,\kappa(\theta)) := F_1(x,\tilde{\kappa}).\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение для параметрической ошибки $\tilde{\kappa}(t)$, в свою очередь, может быть записано в виде:

$$\dot{\tilde{\kappa}}(t) = -\gamma_0 \frac{\mathcal{M}_\kappa^2(t)}{1+\mathcal{M}_\kappa^2(t)}\tilde{\kappa}(t) := F_2(t,\tilde{\kappa}), \tag{12}$$

где $F_1(x_*, 0) = 0,\ F_2(t,\ 0) = 0$.

При $\Phi(x, u) \in \mathrm{FE}$ в силу $|\mathcal{M}_\kappa(t)| > \underline{\mathcal{M}_\kappa} > 0$. для множителя $\frac{\mathcal{M}_\kappa^2(t)}{1+\mathcal{M}_\kappa^2(t)}$ найдется постоянная $c > 0$ такая, что верно $0 < c < \frac{\mathcal{M}_\kappa^2(t)}{1+\mathcal{M}_\kappa^2(t)} < 1$, откуда на основании (12) следует экспоненциальная сходимость параметрической ошибки $\tilde{\kappa}(t)$.

Уравнения (11), (12) составляют каскадную форму, и для подсистемы (12) за счет нормализатора $\frac{1}{1+\mathcal{M}_\kappa^2(t)}$ гарантировано выполнение неравенства $\sup\limits_{t\geqslant t_0}\sup\limits_{\|\tilde{\kappa}\|\leqslant\kappa_{\max}}\|\nabla_{\tilde{\kappa}}F_2(t,\tilde{\kappa})\| < \infty$, что позволяет воспользоваться для доказательства устойчивости результатами теоремы 3.2 из [4] и леммы B.4 из [5]. По доказанному параметрическая ошибка $\tilde{\kappa}(t)$ экспоненциально сходится к нулю при $\Phi(x, u) \in \mathrm{FE}$, а значит, применяя результаты леммы B.4 и теоремы 3.2, положение равновесия x^* асимптотически устойчиво для всех $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$.

4. Моделирование

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = a_0 x_4 - a_1 \sin(x_1) - (a_2 + a_3 \sin(x_1))\, x_3 - a_4 x_3^2,\\ &\dot{x}_3 = -K x_3 + a_5 \sin(x_1)\, x_2 + K u_1,\ \dot{x}_4 = -a_6 x_4 - a_7 x_2 + u_2,\\ &\theta := col\left\{1,\ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, K, a_5, a_6, a_7\right\}\end{aligned}$$

по методу АКАР выпишем идеальное управление $u^*(t) = v(x, \kappa(\theta)) := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}&v_1 = -\tfrac{a_5}{K} \sin(x_1)\, x_2,\\ &v_2 = -\tfrac{1}{a_0} x_1 + \tfrac{3 a_1 a_0}{a_0} \sin(x_1) - \tfrac{1}{a_0}\left(3 - a_0 a_7 - a_1 \cos(x_1)\right) x_2 +\\ &+ \tfrac{2}{a_0}\left(a_2 + a_3 \sin(x_1)\right) x_3 + \tfrac{2 a_4}{a_0} x_3^2 - (3 - a_6)\, x_4,\\ &\kappa(\theta) = col\left\{\theta_8 \theta_7^{-1}, \theta_2^{-1}, \theta_3, \theta_{10}, \theta_4, \theta_5, \theta_6,\ 3 - \theta_9\right\}.\end{aligned}$$

Найдем преобразования (7):

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}(\theta) = diag\left\{\theta_7, \theta_2^2,\ 1_6^{\mathrm{T}}\right\},\ \mathcal{S}(\theta) = col\left\{\theta_8, \theta_2, \theta_3, \theta_{10}, \theta_4, \theta_5, \theta_6,\ 3 - \theta_9\right\},\\ &\mathcal{T}_{\mathcal{G}}\left(\Xi_{\mathcal{G}}(\Delta)\, \mathcal{Y}_\theta\right) = diag\left\{\mathcal{Y}_{7\theta}, \mathcal{Y}_{2\theta}^2,\ 1_6^{\mathrm{T}}\right\},\\ &\mathcal{T}_{\mathcal{S}}\left(\Xi_{\mathcal{S}}(\Delta)\, \mathcal{Y}_\theta\right) = col\left\{\mathcal{Y}_{8\theta}, \Delta\mathcal{Y}_{2\theta}, \mathcal{Y}_{3\theta}, \mathcal{Y}_{10\theta}, \mathcal{Y}_{4\theta}, \mathcal{Y}_{5\theta}, \mathcal{Y}_{6\theta},\ 3\Delta - \mathcal{Y}_{9\theta}\right\}.\end{aligned},$$

что позволяет реализовать идентификационное адаптивное управление (10)[1].

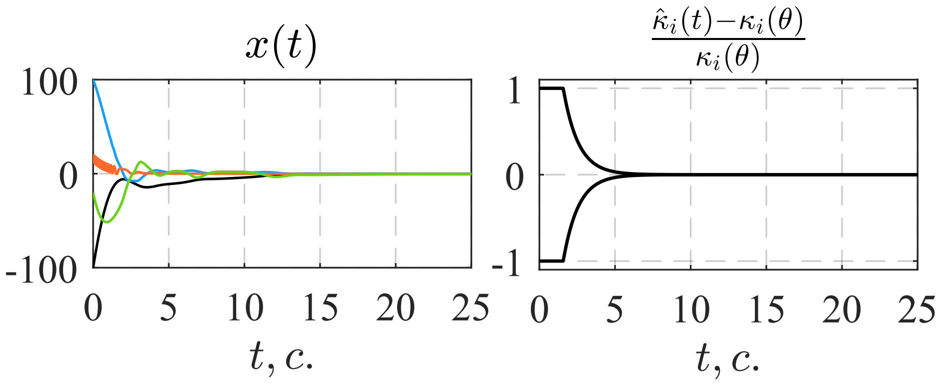

Рис. 1. Результаты моделирования

Список литературы

1. Astolfi A. Feedback stabilization of nonlinear systems // Encyclopedia of Systems and Control. 2021. P. 794-803
2. Narendra K. S., Annaswamy A. M. Stable adaptive systems. Courier Corporation, 2012.
3. Wang, L., Ortega, R., Bobtsov, A., Romero, J. G., Yi, B. Identifiability implies robust, globally exponentially convergent on-line parameter estimation //International Journal of Control. 2023. P. 1-17.
4. Vidyasagar M. Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions: Stability and stabilizability // IEEE Transactions on Automatic Control. 1980. Vol. 25. No.4. P. 773-779.
5. Isidori A. Lectures in feedback design for multivariable systems. Basel, Switzerland: Springer International Publishing, 2017.

[1] схему моделирования можно скачать по ссылке: https://github.com/lastconst/vspu2024_model