УДК 517.977

КВАНТИФИКАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА ПРИ СМЕЩЕННОМ ВНЕШНЕМ ВОЗМУЩЕНИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В.Ф. Соколов

Коми научный центр УрО РАН

Россия, 167982, Республика Коми, г. Сыктывкар, ГСП-2, ул. Коммунистическая, 24

E-mail: sokolov@ipm.komisc.ru

Ключевые слова: робастное управление, оптимальное управление, ограниченное возмущение, неопределенность, множественное оценивание.

Аннотация: Для дискретного минимально-фазового объекта управления с известной номинальной моделью, ограниченным смещенным внешним возмущением и операторными возмущениями по выходу и управлению рассмотрена задача оптимальной квантификации возмущений в рамках ℓ_1-теории робастного управления. Идентификационным критерием для оптимальной оценки норм всех возмущений и качества номинальной модели служит наихудшая асимптотическая ошибка отслеживания заданного ограниченного сигнала в классе рассматриваемых возмущений.

1. Введение

В середине 1990-х, после первоначального периода активной разработки теории робастного управления, актуальной для практических приложений этой теории стала проблема нахождения номинальной модели и оценки ее качества [1]. До настоящего времени эти проблемы остаются актуальными [2]. Причиной этого является то обстоятельство, что доминирующая H_∞ теория робастного управления не дает явных представлений для соответствующих ей показателей качества управления. Это вынуждает использовать искусственные идентификационные критерии, не позволяющие судить о качестве модели в контексте задач управления. В альтернативной ℓ_1-теории, соответствующей сигнальному пространству ℓ_∞ [3], были получены явные представления для показателей качества управления [5]. Это открыло возможности их использования в качестве идентификационных критериев. В настоящей работе рассматривается задача оптимального онлайн оценивания качества заданной номинальной модели в контексте задачи слежения для дискретного минимально-фазового объекта при неизвестных нормах внешнего и операторных возмущений. Решение задачи сводится к дробно-линейному программированию, реализуемому в онлайн режиме.

2. Модель управляемого объекта и постановка задачи

Модель управляемого объекта описывается уравнением

$$a(q^{-1})y_t = b(q^{-1})u_t + v_t\,, \quad t = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{1}$$

где $y_t \in \mathbb{R}$ – выход объекта в момент времени t, $u_t \in \mathbb{R}$ – управление, $v_t \in \mathbb{R}$ суммарное возмущение, q^{-1} – оператор сдвига назад ($q^{-1}y_t = y_{t-1}$). Начальные данные $y_{1-n}^0 = (y_{1-n}, \ldots, y_0)$ произвольны. Полиномы

$$a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n\,, \quad b(\lambda) = b_1\lambda + \ldots + b_m\lambda^m$$

характеризуют **номинальную** модель объекта, т.е. модель без суммарного возмущения v_t. Это возмущение имеет вид

$$v_t = c^w + \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t \;\; \forall t\,, \quad \|w\|_\infty = 1\,. \tag{2}$$

Параметры c^w и δ^w в (2) характеризуют, соответственно, смещение внешнего возмущения и верхнюю границу неизвестного несмещенного возмущения $\delta^w w$. Числа $\delta^y > 0$ и $\delta^u > 0$ – коэффициенты усиления неопределенностей (операторных возмущений) $\Delta^1(y)_t$ и $\Delta^2(y)_t$ по выходу и управлению соответственно и

$$|\Delta^1(y)_t| \leqslant p_t^y = \max_{t-\mu\leqslant k\leqslant t-1} |y_k|\,, \quad |\Delta^2(u)_t| \leqslant p_t^u = \max_{t-\mu\leqslant k\leqslant t-1} |u_k|\,. \tag{3}$$

В теории робастного управления в ℓ_1 постановке эти неопределенности называются неопределенностями с ограниченной памятью μ и гарантируют независимость асимптотической динамики замкнутой системы управления от начальных данных [4, 5]. Память μ может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для гарантируемого качества слежения.

Описание возмущений в виде (2), (3) эквивалентно неравенствам

$$|v_t - c^w| \leqslant \delta^w + \delta^y p_t^y + \delta^u p_t^u\,. \tag{4}$$

Априорная информация об объекте (1) заключается в двух предположениях.

Предположение 1. *Корни полинома $\frac{b(\lambda)}{\lambda}$ лежат вне замкнутого единичного круга комплексной плоскости $\mathbb{C}$*

Предположение 2. *Полиномы $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ известны, $b_1 \neq 0$, параметры суммарного возмущения c^w и $\delta = (\delta^w, \delta^y, \delta^u)$ неизвестны.*

Предположение 1 гарантирует ограниченность управления u, если выход объекта y ограничен, и такой объект называется минимально-фазовым. Еще одно предположение будет сформулировано в следующем разделе после Теоремы 1.

Содержательная постановка задачи заключается в оптимальной согласованной с измерениями оценке качества заданной номинальной модели по данным измерений в контексте задачи оптимального слежения.

3. Оптимальная квантификация возмущений при заданной номинальной модели и известном смещении c^w

Пусть $r = (r_1, r_2, r_3, \ldots)$ – известный ограниченный ($r \in \ell_\infty$) задающий сигнал и показатель качества в задаче слежения имеет вид

$$
(5) \qquad J_\mu(c^w, \delta) = \sup_{v \in V} \|y - r\|_{ss}, \quad \|y - r\|_{ss} := \limsup_{t \to +\infty} |y_t - r_t|,
$$

где V – множество возмущений v, удовлетворяющих неравенствам (4).

Рассмотрим регулятор, описываемый уравнением

$$
(6) \qquad b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_t + r_t - c^w.
$$

Тогда для выхода замкнутой системы управления (1), (6) получаем

$$
(7) \qquad y_t - r_t = v_t - c^w = \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t.
$$

В силу произвольности и непредсказуемости правой части в (7) регулятор (6) является *оптимальным* для показателя качества (5).

Определение 1. *Замкнутая система называется робастной устойчивой в классе возмущений V, если $J_\mu(c^w, \delta) < +\infty$.*

Введем следующие обозначения

$$
G_{uy}(\lambda) = \frac{a(\lambda) - 1}{b(\lambda)} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k, \ \|G_{uy}\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k|, \ \frac{1}{b(\lambda)} = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k \lambda^k, \ \|\frac{1}{b(\lambda)}\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |d_k|
$$

Теорема 1. *Для замкнутой системы (1), (6) справедливы следующие утверждения.*

1) Сиситема робастно устойчива в классе V при $\mu = +\infty$ если и только если

$$
(8) \qquad \delta^y + \delta^u \|G_{uy}\| < 1.
$$

Для системы с нулевыми начальными данными y^0_{1-n} и $\mu = +\infty$

$$
(9) \qquad J(c^w, \delta) := J_{+\infty}(c^w, \delta) = \frac{\delta^w + \delta^y \|r\|_{ss} + \delta^u(|c^w| + \|r\|_{ss})\|1/b(q^{-1})\|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G_{uy}\|}.
$$

2) Для системы с произвольными начальными данными y^0_{1-n} и $\mu < +\infty$

$$
(10) \qquad J_\mu(c^w, \delta) \leqslant J_{+\infty}(c^w, \delta) \quad \forall\, \mu > 0,
$$

и если последовательность $|r|$ равномерно часто попадает в окрестность верхнего предела $\|r\|_{ss}$, то при любых начальных данных

$$
(11) \qquad J_\mu(c^w, \delta) \nearrow J(c^w, \delta) \quad (\mu \to +\infty),
$$

где $\nearrow$ означает монотонную сходимость снизу при $\mu \to +\infty$.

Предположение 3. *Известно число* $\bar{\delta}$ *такое, что*

$$\delta^y + \delta^u \|G_{uy}\| \leqslant \bar{\delta} < 1\,. \tag{12}$$

Предположение (12) не ограничительно, поскольку параметр $\hat{\delta}$ может быть выбран конструктором сколь угодно близким к 1, благодаря чему исключаются из рассмотрения неприемлемые объекты, для которых значение показателя $J(c^w, \delta)$ слишком велико.

Поскольку параметры $\delta = (\delta^w, \delta^y, \delta^u)$ неизвестны, их необходимо оценивать по данным измерений. Из уравнения объекта (1) и неравенств (4) следует, что полная информация о неизвестной строке δ в момент времени t имеет вид

$$\delta \in D_t = \{\hat{\delta} \geqslant 0 \mid |a(q^{-1})y_k - b(q^{-1})u_k - c^w| \leqslant \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p_k^y + \hat{\delta}^u p_k^u \ \ \forall k \leqslant t\ \}\,.$$

Тогда в момент времени t оптимальная относительно показателя $J(c^w, \delta)$ и согласованная с измерениями $y_0, \dots, y_t$,$u_0, \dots, u_{t-1}$ оценка параметра δ имеет вид

$$\delta_t^{opt} = \operatorname*{argmin}_{\hat{\delta} \in D_t} J(\hat{\delta})\,. \tag{13}$$

Оптимальная задача (13) является задачей дробно-линейного программирования относительно неизвестной строки δ и стандартным образом [6] сводится к задаче линейного программирования. Однако число линейных относительно δ неравенств в описании множеств D_t может неограниченно возрастать. Описываемый далее алгоритм обеспечивает решения задачи (13) с заданной точностью и сходимость оценок за конечное время.

Выберем $\varepsilon > 0$, задающее размер мертвой зоны при обновлении полиэдральных оценок S_t и векторных оценок δ_t неизвестной строки δ. Начальные оценки имеют вид

$$S_0 := \{\ \hat{\delta} = (\hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T\ |\hat{\delta} \geqslant 0\,,\ \hat{\delta}^y + \hat{\delta}^u \|G_{uy}\| \leqslant \bar{\delta} < 1\ \}\,, \delta_0 = (0,0,0)^T.$$

Введем обозначения

$$\nu_{t+1} = |a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_{t+1} - c^w|\,, \quad \phi_{t+1} = (1, p_{t+1}^y, p_{t+1}^u)^T$$

и запишем новое неравенство в описании D_{t+1} в виде

$$\delta \in \Omega_{t+1} = \{\ \hat{\delta} \mid \nu_{t+1} \leqslant \hat{\delta}\phi_{t+1}\ \}\,. \tag{14}$$

Пусть S_t и δ_t – полиэдральная и векторная оценки δ в момент t. Положим

$$S_{t+1} = \begin{cases} S_t\,, & \text{если } \nu_{t+1} \leqslant \delta_t\phi_{t+1} + \varepsilon\|\phi_{t+1}\|_2, \\ S_t \cap \Omega_{t+1}\,, & \text{в противном случае}\,, \end{cases} \tag{15}$$

$$\delta_{t+1} = \operatorname*{argmin}_{\hat{\delta} \in S_{t+1}} J(\hat{\delta})\,. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1–3, параметр* ε *удовлетворяет неравенству* $0 < \varepsilon < (1-\bar{\delta})/(1+\|G_{uy}\|)$ *и оценки* S_t *и* δ_t *вычисляются в замкнутой системе* (1), (6) *согласно* (15) *и* (16). *Тогда число обновлений оценок* (15) *и* (16) *конечно и*

$$\|y - r\|_{ss} \leqslant J(c^w, \delta_\infty^\varepsilon) = J(c^w, \delta_\infty) + O(\varepsilon) \leqslant J(c^w, \delta) + O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0)\,, \tag{17}$$

где $\delta_\infty = \lim_{t\to+\infty} \delta_t$ *и* $\delta_\infty^\varepsilon = (1+\varepsilon, \delta^y + \varepsilon, \delta^u + \varepsilon)\,.$

4. Робастное слежение при неизвестном смещении c^w

Алгоритм (15), (16) можно использовать для управления объектом (1) при неизвестном смещении c^w из известного промежутка $[c^w_{min}, c^w_{max}]$. Для этого выберем натуральное число N и сетку тестируемых оценок c^w_k смещения c^w:

$$c^w_k = c^w_{min} + k\varepsilon_1\,,\ k = 0, 1, \cdots, N\,, \quad \varepsilon_1 = \frac{c^w_{max} - c^w_{min}}{N}\,. \tag{18}$$

Алгоритм (15), (16) используется параллельно для всех тестируемых значений c^w_k. Управление в момент t определяется оптимальным регулятором, соответствующим оценке $c^w_{k_t}$, где

$$k_t = \operatorname*{argmin}_k J(c^w_k, \delta^k_t)$$

и δ^k_t – оценка в момент времени t неизвестного δ, соответствующая смещению c^w_k. Поскольку до сходимости оценок на начальном этапе номер k_t используемой для управления оценки может меняться, для правильной квантификации возмущений в установившемся режиме из полиэдральной оценки S_{k_t} следует удалить неравенства вида (15), не соответствующие установившейся оценке $c^w_{k_t}$. Численное моделирование показывает субоптимальность такого робастного управления.

5. Заключение

Задача оптимальной онлайн квантификации норм ограниченного смещенного внешнего возмущения и операторных возмущений по выходу и управлению для дискретной минимально-фазовой номинальной модели сведена к дробно-линейному программированию, реализуемому в режиме онлайн. Решение базируется на методе рекуррентных целевых неравенств, полиэдральном оценивании и использовании показателя качества задачи слежения как идентификационного критерия.

Список литературы

1. Ljung L., Guo L. The Role of Model Validation for Assessing the Size of the Unmodeled Dynamics // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. Vol. AC-42, No. 9. P. 1230–1239.
2. Ljung L. Revisiting Total Model Errors and Model Validation // J. Syst. Sci. Complex. 2021. Vol. 34. P. 1598—1603.
3. Khammash M., Pearson J.B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. Vol. AC-36, No. 4. P. 398–412.
4. Соколов В.Ф. Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в ℓ_1-метрике // Автоматика и телемеханика. 1999. № 1. С. 101–112.
5. Соколов В.Ф. Робастное управление при ограниченных возмущениях. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2011.
6. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press. 2003.