УДК 62–501.2

# СЛЕЖЕНИЕ ЗА ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ НА СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМАХ

**В.А. Уткин**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vicutkin@ipu.ru

**Ключевые слова:** скользящий режим, эталонная модель, блочный подход.

**Аннотация:** Решается задача слежения модели объекта управления за заданными значениями, порождаемыми эталонной моделью или генератором заданий. Для случая возмущенных систем для компенсации неизвестных неопределенностей и внешних возмущений используется техника скользящих режимов. Показано, что организация скользящих движений в пространстве невязок объекта управления и генератора заданий позволяет решить поставленную задачу без расширения пространства состояний. Использование блочного подхода позволяет декомпозировать задачи синтеза высокой размерности на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности.

## 1. Введение

Одним из ранних подходов к синтезу адаптивного управления является управление по эталонной динамической модели (Model Reference Adaptive Control, MRAC) [1, 2]. Суть этой задачи заключается в том, чтобы с помощью управления обеспечить сходимость вектора состояния объекта управления к вектору состояния эталонной модели (или та же задача, но относительно выходных переменных). Проблема в решении этой задачи заключается в том, что эталонная модель полностью определена, а модель объекта управления подвержена параметрическим и внешним возмущениям и, кроме того, содержит неучтенные паразитную динамику. Дополнительные сложности возникают в случае высокой размерности модели объекта управления и эталонной модели.

В данной работе задача обеспечения инвариантности к внешним и параметрическим возмущениям решается на основе теории систем с разрывными управлениями, функционирующими в скользящем режиме [3], ставшей уже классическим методом обеспечения робастных свойств замкнутых систем. Кроме того, при движении в скользящем режиме редуцируется порядок исходной модели объекта управления. Дополнительная декомпозиция задачи синтеза обратной связи осуществляется в данной работе с использованием блочного подхода в управлении [4, 5].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 на простом примере второго порядка поясняется основная идея предлагаемого подхода. В подразделе 2.1 полагается, что управление может формироваться из непрерывной и разрывной компонент, а в подразделе 2.2 предполагается, что управление может быть только разрывным. В разделе 3 намечается процедура решения задачи слежения за эталонной моделью для нелинейных многомерных систем. В заключении обсуждаются полученные результаты и планы по их развитию.

## 2. Базовая идея предлагаемого подхода

Поясним основные идеи на примере линейной система второго порядка при действии внешних неконтролируемых возмущений вида [6]

(1) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u + \eta_2(x,t)$,

где $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in R^2$ – вектор состояния, доступный для измерения, $x_1$ – выходная, регулируемая переменная, $u \in R$ – управление, $\eta_2(x,t)$ – неопределенная функция, включающая как собственно внешние возмущения, так и параметрические и функциональные неопределенности модели объекта управления.

Вместе с системой (1) рассматривается эталонная модель вида

(2) $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = u_0(\mathrm{z}, t)$,

где $z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}} \in R^2$ – вектор состояния, доступный для измерения, $u_0(t) \in R$ – задающее воздействие.

Ставится задача отработки вектором состояния системы (1) вектора состояния системы (2) в предположении об ограниченности возмущений

(3) $|\eta_2(x(t), t)| \leq \mathrm{N} = \mathrm{const}, t \geq 0$.

В данном разделе предполагается, что управление может состоять из непрерывной и разрывной компонент.

Представим (1), (2) в невязках

(4) $\dot{e}_1 = e_2, \dot{e}_2 = u - u_0 + \eta_2, e_i = x_i - z_i, i = 1,2$.

В рамках блочного подхода введем замену переменных вида

(5) $\bar{e}_2 = e_2 + ke_1, k = \mathrm{const} > 0$.

Система (4) относительно замены (5) примет вид

(6) $\dot{e}_1 = -ke_1 + \bar{e}_2, \dot{\bar{e}}2$.

Как видим, задача стабилизации системы (6) сводится к задаче стабилизации второй подсистемы (6) первого порядка.

## 2.1. Непрерывно-разрывное управление

Синтезируем управление с непрерывной и разрывной составляющими

(7) $u = u_1 + u_0, u_1 = -M\mathrm{sign}(s_1)$,

где

(8) $s_1 = \bar{e}_2$.

Движение в скользящем режиме системы (6) описывается уравнениями

(9) $\dot{\mathrm{e}}_1 = -ke_1$.

Согласно методу эквивалентного управления (МЭУ) [3] его среднее значение при движении в скользящем режиме по плоскости (8) определяется по следующей схеме:

(10) $\dot{s}_1 = ke_2 + u_1 + \eta_2 = 0 \Rightarrow u_{1eq} = -ke_2 - \eta_2 = -k(\bar{e}_2 - ke_1) - \eta_2$.

После подстановки эквивалентного управления (10) в систему (1) имеем

(11) $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -k(\bar{e}_2 - ke_1) + u_0(z,t)$.

Переменная $\bar{e}_2$ стабилизируется за конечное время, а переменная $e_1 \to 0$ убывает по экспоненте (9). Таким образом, решена задача «подгонки» вектора состояния модели объекта управления к вектору состояния эталонной модели.

Часто в практических приложениях встречаются ситуации, когда требуется обеспечить движение объекта в соответствии с движением эталонной модели управления из произвольных начальных условий. В этом случае в эталонной модели выставляются начальные условия, равные текущим значениям вектора состояния объекта управления. Другими словами, справедливо

**Утверждение 1.** *Пусть в системе (4), (7) заданы нулевые начальные условия* $e_1(0) = x_1(0) - z_1(0) = 0, e_2(0) = x_2(0) - z_2(0) = 0$. *Тогда:*

*1) в системе (6) скользящий режим возникает в начальный момент времени на плоскости* $s_1 = 0, t \geq 0$, *движение в скользящем режиме описывается подсистемой (9);*

*2) движения систем (11)* $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u_0(z,t)$ *и (2)* $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = u_0(z,t)$ *совпадают при* $t \geq 0$.

Из (10) следует, что возникновение скользящего режима обеспечивается выбором амплитуды разрывного управления (7) на основе неравенства [3]

(12) $$M > |ke_2 + \eta_2|$$

и, следовательно, при $e_2 = 0$ имеем $M > \mathrm{N}$.

## 2.2. Разрывное управление

Теперь синтезируем разрывное управление в виде

(13) $$u = -M\mathrm{sign}(s_1),$$

где $s_1 = \bar{e}_2$. Согласно МЭУ имеем:

(14) $$\dot{s}_1 = ke_2 + u - u_0 + \eta_2 = 0 \Rightarrow u_{eq} = -ke_2 + u_0 - \eta_2.$$

Движение системы (6) в скользящем режиме описывается уравнением (9), а движение системы (1) после подстановки эквивалентного управления (14) принимает вид (11). В силу $e_1, \bar{e}_2 \to 0 \Rightarrow e_1, e_2 \to 0 \Rightarrow z \to x$ вектор состояния модели объекта управления (1) асимптотически стремится к вектору состояния эталонной модели (2). Применительно к системе (4), (13) также справедливо Утверждение 1.

Отметим, что при чисто разрывном управлении (13) нижняя граница для выбора амплитуды будет больше, чем для выбора амплитуды (12) управления (7):

(15) $$M > |ke_2 + \mathrm{N} + u_0|$$

и при $e_2 = 0$ определяется неравенством $M > |\mathrm{N} + u_0|$.

# 3. Нелинейные системы

Рассматривается нелинейная система при действии внешних неконтролируемых согласованных возмущений вида

(16) $$\dot{x} = f(x) + B(x)[u + \eta(x,t)],$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния, доступный для измерения, $u \in R^m$– вектор управлений, $\eta(x,t)$ – вектор, включающий в себя изменение параметров, паразитной динамики и внешние возмущения. Полагается, что $\mathrm{rank}B(x) = m$ и

(17) $$|h_i(x,t)| \leq h_i^+(x,t), i = \overline{1,m},$$

где $h_i^+(x,t)$ – известные положительные скалярные функции.

Вместе с системой (16) рассматривается эталонная модель вида

(18) $$\dot{z} = f(z) + B(z)u_0(z,t),$$

где $z \in R^n$ – вектор состояния, доступный для измерения, $u_0(z,t) \in R^m$– задающее воздействие.

Ставится задача отработки вектором состояния системы (16) вектора состояния системы (18).

## 3.1. Разрывное управление

С помощью невырожденной замены переменных система (16) может быть преобразована к регулярной форме [7, 8]

(19) $$\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_0), \dot{x}_0 = f_0(x_1,x_0) + B_0(x_1,x_0)[u + \eta(x,t)],$$

где $x_1 \in R^{n-m}, x_0 \in R^m$и $\mathrm{rank}B_0(x_1,x_0) = m$. Аналогичное преобразование приводит эталонную модель (18) также к регулярной форме

(20) $$\dot{z}_1 = f_1(z_1,z_0), \dot{z}_0 = f_0(z_1,z_0) + B_0(z_1,z_0)u_0.$$

Предполагается выполнение условий

(21) $$\mathbf{rank}\left\{\partial f_1(x_1,x_0)/_{\partial x_0}\right\} = \mathbf{rank}\left\{\partial f_1(z_1,z_0)/_{\partial z_0}\right\} = n - m = m.$$

После введения замены переменных

(22) $\bar{x}_0 = f_1(x_1,x_0) + Kx_1, K = \text{diag}\{k_i\}, k_i = \text{const} > 0, i = \overline{1,m}$

система (19) представима в виде

(23) $\dot{x}_1 = -Kx_1 + \bar{x}_0, \dot{\bar{x}}0.$

С помощью аналогичной замены переменных

(24) $\bar{z}_0 = f_1(z_1,z_0) + Kz_1, K = \text{diagk}_i, k_i = \text{const} > 0, i = \overline{1,m}$

система (21) представима в виде

(25) $\dot{z}_1 = -Kz_1 + x_0, \dot{\bar{z}}0.$

Запишем системы (23) и (24) в невязках $e_1 = x_1 - z_1, \bar{e}_0 = \bar{x}_0 - \bar{z}_0$:

(26) $$\dot{e}_1 = -Ke_1 + \bar{e}_0,$$
$$\dot{\bar{e}}_0 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_0}[f_0(x_1,x_0) + B_0(x_1,x_0)[u + \eta(x,t)]] - \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\dot{z}_1 -$$
$$-\frac{\partial f_1}{\partial z_0}\left[f_0(z_1,z_0) + B_0(z_1,z_0)u_0\right]$$

Организация скользящего режима по плоскости $\bar{e}_0 = 0$ обеспечивает асимптотическую сходимость в нуль переменной $e_1 \to 0$, например, с помощью управления

(27) $$u = \left\{\frac{\partial f_1}{\partial x_0}B_0(x_1,x_0)\right\}^{-1} M\mathbf{sign}(\bar{e}_2)$$

в предположении $\det\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x_0}B_0(x_1,x_0)\right\} \neq 0$. С учетом $x_1 = z_1, \bar{x}_0 = \bar{z}_0$ из соотношений (22) и (25) следует равенства $f_1(x_1,x_0) = f_1(z_1,z_0)$ и $f_0(x_1,x_0) = f_0(z_1,z_0)$, $\dot{x}_1 = \dot{z}_1 = 0$.

Согласно МЭУ имеем

(28) $u_{eq} = -\eta(.) + u_0.$

После подстановки эквивалентного уравнения в (19) получим:

(29) $\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_0), \dot{x}_0 = f_0(x_1,x_0) + B_0(x_1,x_0)u_0.$

Как видим, система (29) имеет такую же форму, как и эталонная модель (18) и, следовательно, вектор состояния системы (19) в асимптотике совпадает с вектором состояния эталонной модели. Отметим, что и в данном случае Утверждение 1 также справедливо.

## 4. Заключение

Побудительным мотивом данного исследования стало изучение обзорной статьи [6] и, в частности, раздела про интегральный скользящий режим (Integral Sliding Mode). Дальнейшее изучение этого вопроса [3] показало ряд недостатков известных результатов:

- вызывает сомнение необходимость в рамках данного подхода в расширении пространства состояний;
- в результате применения интегрального скользящего режима получаются две системы с одинаковой структурой (29) и (18) и утверждается, что при совпадении начальных условий их поведение одинаково. Естественно, что такой результат не применим на практике, поскольку является не грубым как из-за возможной

погрешности установки начальных условий, так и точности компенсации возмущений;

- другое ограничение данного подхода заключается в том, что часто управление принадлежит классу непрерывных функций и не может быть разрывным.

Предложенный в данной работе подход позволяет решить поставленную задачу слежения за заданными сигналами без расширения пространства состояний, а решение задачи стабилизации в невязках обеспечивает робастность замкнутой системы. Последний пункт из перечня выше, по-видимому, может быть решен только за счет расширения пространства состояний с использованием наблюдателей состояния [9] или техники скользящих режимов второго рода (Super-Twisting Algorithm) [3].

Дальнейшее развитие данной тематики видится в применении намеченного подхода к линейным и нелинейным системам общего вида.

## Список литературы

1. Уонем У.М. Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980, 376 с.
2. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. С.Пб: Наука, 2003, 282 с.
3. Utkin V.I., Guldner J., Shi J. Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. London: Taylor and Francis, 1999.
4. Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А., Уткин В.И. Принцип блочного управления. Часть 1 // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 38-47.
5. Дракунов С.В., Изосимов Д.Б., Лукьянов А.Г., Уткин В.А., Уткин В.И. Принцип блочного управления. Часть 2 // Автоматика и телемеханика. 1990. № 6. С. 20-32.
6. Poznyak A.S., Orlov Yu.V. Vadim I. Utkin and Sliding Mode Control // Journal of the Franklin Institute. 2023. Vol. 360, No.17. P. 12892-12921.
7. Уткин В.А., Уткин В.И. Метод разделения движений в задачах инвариантности // Автоматика и Телемеханика. 1983. № 12. С. 39-48.
8. Лукьянов А.Г., Уткин В.И. Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // Автоматика и телемеханика. 1981. № 4. С. 5-13.
9. Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В. Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // Автоматика и телемеханика. 2017. № 12. С. 26-53.