УДК 62-551.4+681.5.03

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА

В.Н. Честнов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: vnchest@yandex.ru

Д.В. Шатов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: dvshatov@gmail.com

Ключевые слова: линейные многомерные системы, синтез дискретных регуляторов, ограниченные внешние возмущения, ошибки регулирования, радиус запасов устойчивости, время регулирования, абсолютная устойчивость.

Аннотация: Рассматриваются линейные непрерывные многомерные объекты управления, подверженные действию неизвестных ограниченных внешних возмущений. Для них предлагается метод синтеза дискретных регуляторов по выходу, который обеспечивает желаемые или достижимые показатели качества: ошибки по регулируемым переменным, время регулирования и радиус запасов устойчивости. Подход к синтезу основан на стандартной процедуре H_∞- оптимизации, сформулированной особым образом. Робастные свойства синтезированных систем обеспечиваются по физическому входу объекта, где гарантируется многомерный радиус запасов устойчивости и свойство абсолютной устойчивости замкнутой системы при введении на всех входах объекта секторных нелинейностей, размер сектора которых однозначно связан с полученным при синтезе радиусом запасов устойчивости. Численный пример демонстрирует эффективность предложенного подхода.

1. Введение

В настоящее время цифровые регуляторы заняли главенствующее положение практически во всех высокотехнологических отраслях промышленности и многих других областях, и поэтому задача синтеза дискретных регуляторов многомерных систем по инженерным показателям качества приобрела не виданную ранее актуальность и важность в связи с реальными запросами инженеров-проектировщиков.

Современные же техники синтеза регуляторов по измеряемому выходу $H_2, H_\infty, L_1(l_1), \mu -$синтез, а также методы размещения полюсов, как правило, учитывают лишь отдельные показатели качества, либо не учитывают их вовсе.

В докладе рассмотрена задача синтеза дискретных регуляторов для многомерных объектов по заданным или достижимым инженерным показателям качества: ошибкам по регулируемым переменным, времени регулирования и радиусу запасов устойчивости. Решение этой задачи опирается на специальным образом сконструированную стандартную задачу H_∞ оптимизации. В этом смысле предлагаемый подход развивает результат работы [1] на случай дискретных регуляторов непрерывных многомерных систем.

2. Постановка задачи

Рассматривается управляемая и наблюдаемая дискретная модель непрерывного объекта управления, описываемая разностными уравнениями:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B[u(k) + w(k)],\\ y(k) &= Cx(k), k = 0,1,2,\dots, \end{aligned}$$

где $x(k) \in R^n$ – вектор состояния объекта, $u(k) \in R^m$– управление (вход объекта), $y(k) \in R^{m_2}$– измеряемый и одновременно регулируемый выход объекта (вход регулятора), $w(k) \in R^m$– вектор внешних возмущений. Матрицы объекта A, B, C известны.

Объект (1) замыкается дискретным стабилизирующим динамическим регулятором по выходу:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c y(k),\\ u(k) &= C_c x_c(k) + D_c y(k), k = 0,1,2,\dots, \end{aligned}$$

где $x_c(k) \in R^{n_c}$ – вектор состояния регулятора ($n_c \le n$), и A_c, B_c, C_c, D_c – матрицы чисел.

Компоненты возмущения w являются ограниченными функциями:

$$w_i(k) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \sin(\omega_j kh + \varphi_{ij}), i = \overline{1,m},$$

где h – период дискретности. Амплитуды$w_{ij} \ge 0$, фазы$\varphi_{ij}, i = \overline{1,m}$, и частоты $\omega_j, j = \overline{1,\infty}$ компонент возмущений – неизвестны. Число частот неограниченно.

Предполагается, что внешнее возмущение ограничено в следующем смысле:

$$\sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \le w_i^*, i = \overline{1,m},$$

где w_i^* – заданные числа. Это означает, что для всех k: $|w_i(k)| < w_i^*, i = \overline{1,m}$.

Ошибки по регулируемым переменным определяются следующим соотношениями:

$$y_{i,st} = \sup_{k \ge k_p} |y_i(k)|, i = \overline{1,m_2},$$

где k_p – число, определяемое по времени регулирования системы $t_p = k_p h$.

Требования к точности системы определяются неравенствами вида:

$$(3)\qquad y_{i,st} \le y_i^*, i = \overline{1,m_2}$$

где $y_i^* > 0$ – заданные числа (желаемые ошибки регулирования).

Число k_p, которое определяется следующими условиями:

$$(4)\qquad |\lambda_i(A_{cl})| \le \frac{1}{\alpha}, i = \overline{1,n+n_c}$$

где$\lambda_i(\cdot)$ – собственные числа матрицы, $\alpha \ge 1$– заданное число и A_{cl} – матрица замкнутой системы (1), (2). Степень устойчивости дискретной системы – это величина $1/\alpha$ – радиус круга с центром в начале координат, внутри которого лежат все собственные числа матрицыA_{cl}.

На практике выбор значения α определяется согласно $\alpha = e^{\beta h}$, где β – степень устойчивости непрерывной системы. Известна приближенная оценка времени регулирования$t_p \approx 3/\beta$, откуда $\alpha = e^{(3h)/t_p}$.

Радиус запасов устойчивости $r \in (0,1)$ на физическом входе объекта определяется следующим частотным неравенством [2]:

$$(5)\qquad \left[I + W\left(e^{-j\omega h}\right)\right]^T \left[I + W\left(e^{j\omega h}\right)\right] \ge r^2 I, \omega \in [0, \pi/h],$$

где I – единичная матрица соответствующего размера, $W(\mathrm{z}) = -K(\mathrm{z}) W_0(\mathrm{z})$– передаточная матрица разомкнутой по входу объекта системы (1), (2), $W_0(\mathrm{z}) = \mathrm{C}(\mathrm{z}I -$

$A)^{-1}B$ – передаточная матрица объекта по управлению, $K(\mathrm{z}) = \mathrm{C}_c(\mathrm{z}I - A_c)^{-1}B_c + D_c$ – передаточная матрица регулятора, z – символ Z-преобразования.

Задача. *Найти матрицы A_c, B_c, C_c, D_c стабилизирующего регулятора (2) такие, что выполняются следующие требования:*

- *к точности:$y_{i,st} \le \gamma y_i^*, i = \overline{1, m_2}$, где γ – заданное (достижимое) число;*
- *к робастности: радиусу запасов устойчивости (5), где $0 < r < 1$ – заданное (достижимое) число;*
- *к быстродействию: собственные числа матрицы A_{cl} должны удовлетворять условию (4), в котором $\alpha \ge 1$ – заданное (достижимое число).*

3. Основные результаты

Система (1), (2), представленная в форме передаточных матриц, имеет вид:

(6) $$y = W_0(\mathrm{z})z_1, u = K(\mathrm{z})y, z_1 = u + w, z_2 = Q^{1/2}y,$$

где $w \in R^m$ – вектор внешних возмущений;$z_1 \in R^m$ и $z_2 \in R^{m_2}$ – векторы регулируемых переменных, причем z_1 – используется при синтезе регулятора и определяет желаемый радиус запасов устойчивости на входе объекта; $Q^{1/2}$ – диагональная весовая матрица, определяющая точность по регулируемым переменным $y \in R^{m_2}$. Система уравнений (6) изображена в виде структурной схемы на рис. 1а).

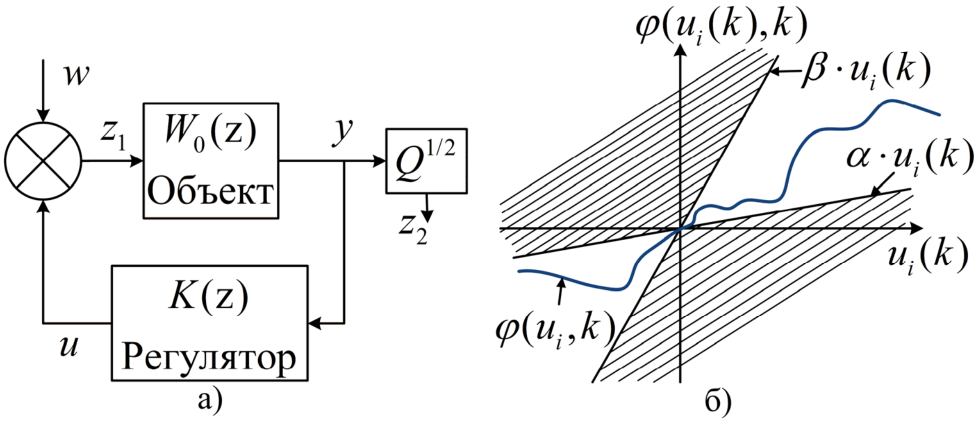

Рис. 1.а) Структурная схема замкнутой системы; б) Секторная нелинейность, вводимая по каждому i-му входу объекта.

Введем расширенный вектор регулируемых переменных$z^T = [z_1^T \quad z_2^T]$, а матрицу, связывающую zс вектором w, обозначим $T_{zw}(\mathrm{z})$, тогда

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_{zw}(\mathrm{z}) \cdot w = [T_{z_1w} \quad T_{z_2w}]w.$$

Пусть регулятор с матрицами $\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, \mathrm{C}_c, D_c$ решает задачу минимизации H_∞ нормы передаточной матрицы смещенной замкнутой системы T_{zw}:

(7) $$\left\| T_{zw}\left(e^{(-\beta + j\omega)h}\right) \right\|_\infty < \gamma, \omega \in [-\pi/h, \pi/h],$$

где γ – заданное или минимизируемое число.

Для решения задачи (7) необходимо заменить матрицы объекта (1) на смещенные $\tilde{A} = \alpha A, \tilde{B} = \alpha B$. Регулятор, который обеспечивает требуемую степень устойчивости для исходного объекта, имеет матрицы [2]:

(8) $$A_c = \tilde{A}_c/\alpha, B_c = \tilde{B}_c/\alpha, C_c, D_c.$$

Сформулируем основные результаты работы:

Теорема 1. *Регулятор (2) с матрицами (8) разрешает поставленную задачу, если элементы диагональной весовой матрицы Q для смещенной H_∞ задачи (7) выбраны из равенств:*

$$q_i = \frac{\left(\sum_{j=1}^{m} w_j^*\right)^2}{\left(y_i^*\right)^2}, i = \overline{1, m_2}.$$

При этом радиус запасов устойчивости на входе объекта определяется как $r = \gamma^{-1}$, гдеγ– реализовавшееся значение при решении H_∞ задачи (7).

Теорема 2. *Пусть выполняется строгое матричное неравенство (5), тогда годограф Найквиста системы (1), (2), (8), разомкнутой по любому входу объекта управления, не касается круга радиуса r с центром в критической точке $(-1, j0)$.*

Таким образом, система (1), (2), (8), разомкнутая по любому входу объекта (1), имеет радиус запасов устойчивости r. Это хорошая физическая интерпретация матричного частотного неравенства (5). Этот факт и породил название этого показателя качества, по которому легко установить гарантируемые значения запасов по фазе и коэффициенту усиления, широко используемые в инженерной практике [1].

Зачастую нелинейности, которые реально присутствуют у физического объекта управления, возникают из-за нелинейности собственно исполнительных устройств и обычно они вводятся в структурную схему системы по входу объекта, т.е. по переменной z_1 (см. рис.1а), которая в отсутствии возмущения w совпадает с переменной u – выходом регулятора или физическим входом объекта управления. Многомерный круговой критерий абсолютной устойчивости дискретных систем дает:

Теорема 3. *Пусть решена поставленная задача и/или выполняется матричное неравенство (5), тогда нелинейная система (1), (2), (8) с секторной нестационарной нелинейностью (сектор допустимых нелинейностей иллюстрирует рис. 1б)), вводимой по каждому из физических входов объекта будет абсолютно устойчивой (при $w = 0$), при этом размер сектора $[\alpha, \beta]$ определяется как $\alpha = 1/(1 + r)$ и $\beta = 1/(1 - r)$, где r – гарантируемый радиус запасов устойчивости.*

В частном случае эти нелинейности можно рассматривать как нестационарные коэффициенты усиления $l_i(k) \in [\alpha, \beta]$, изменяющиеся в указанных границах произвольным образом независимо друг от друга. Это подчеркивает робастные свойства регулятора.

4. Заключение

В работе предложен метод синтеза дискретных регуляторов по измеряемому выходу для линейных многомерных систем, при действии неизмеряемых ограниченных полигармонических внешних возмущений с неизвестными амплитудами (их сумма ограничена по каждой компоненте возмущения), частотами и неограниченном их числом, который обеспечивает заданные (достижимые): ошибки регулирования, время регулирования и радиус запасов устойчивости на входе объекта. Этот класс возмущений покрывает все множество реально действующих в инженерной практике возмущающих воздействий.

Подход к решению такой задачи базируется на специальным образом сконструированной стандартной H_∞-проблеме и носит достаточный характер.

Сформулированы математически строгие правила выбора коэффициентов весовой матрицы (по заданной точности) при синтезе регулятора. Дана интерпретация многомерного радиуса запасов устойчивости на языке годографов Найквиста для отдельных контуров, разомкнутых по входу объекта. Указаны границы секторных нелинейностей (в частности, нестационарных коэффициентов усиления), при наличии которых на каждом входе объекта, замкнутая система с полученным регулятором абсолютно устойчива. Эти границы определяются величиной радиуса запасов устойчивости.

Предложенный подход к синтезу имеет существенно меньшую степень достаточности, нежели предложенные ранее методы [1,3] за счет двукратного уменьшения числа блочных элементов передаточной матрицы замкнутой системы (7), к которой и применяется техника H_∞-оптимизации. Это стало возможным благодаря приложению внешнего возмущения согласно с управлением. Последнее условие можно считать выполненным для подавляющего большинства электромеханических систем, поскольку физически управление с цифрового регулятора не прямо подается на объект управления, а через исполнительное устройство, которое является усилителем мощности с коэффициентом усиления k_y много больше единицы. Легко видеть, что действие внешнего возмущения согласно с управлением в k_y раз сильнее оказывает действие на регулируемую переменную, нежели такое же возмущение (в виде момента или силы нагрузки) действует на объект. Поэтому ограничения на возмущение, используемые при синтезе, делятся на k_y, для возмущения, приложенного в точке, отличной от управления.

Список литературы

1. Честнов В.Н. Синтез многомерных систем по инженерным критериям качества на основе H_∞-оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2019. № 10. С. 132-152.
2. Честнов В.Н. Синтез дискретных H_∞-регуляторов по заданному радиусу запасов устойчивости и времени регулирования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9. С. 65-82.
3. Честнов В.Н., Шатов Д.В., Лебедев И.А. Синтез дискретных H_∞ регуляторов многомерных систем по инженерным критериям качества // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIII). Москва, 17-20июня 2019 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2019. С. 94-99.