УДК 62-503.57

# СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВИРТУАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

**Нгуен Ти Тхань**
*Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куй Дона*
Вьетнам, Ханой, ул. Хоанг Куок Вьет, 100
E-mail: chithanh@lqdtu.edu.vn

**А.В. Финошин**
*Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана, Калужский филиал*
Россия, 248000, Калужская область, Калуга, ул. Баженова, 2
E-mail: finoshin@bmstu.ru

**Ключевые слова:** скользящие режимы, интегральное виртуальное управление, адаптивное управление, слежение, функция Ляпунова.

**Аннотация:** Рассматривается задача слежения для линейных каскадных систем в условиях параметрической неопределенности. Синтезируется алгоритм прямого адаптивного управления на основе метода скоростного биградиента с интегральным виртуальным управлением. Описывается четырехэтапная процедура синтеза. Достижение цели управления обосновывается методом функций Ляпунова.

## 1. Введение

Рассмотрим задачу адаптивного управления каскадной системой в условиях параметрической неопределенности. При применении скользящих режимов для управления двухкаскадной системой на первом этапе формируется отклонение от поверхности скольжения как невязка между выходом входного каскада и виртуальным управлением и синтезируется виртуальное управление, обеспечивающее желаемое качество управления конечным каскадом. На втором этапе строится управление, гарантирующее возникновение устойчивого скользящего режима. Недостатком систем со скользящими режимами является разрывный характер управления и «дребезг» в реальном скользящем режиме. Для сохранения достоинств и устранения недостатков скользящих режимов применяются скользящие режимы на основе принципа однородности [1]: скользящие режимы высших порядков [2], степенное управление и различные модификации [3], например, метод скручивания. Возможно также расширение размерности входного каскада за счет добавления интеграторов [4].

Объединение идей скользящего режима и адаптации неизвестных параметров конечного каскада лежит в основе настраиваемого скользящего режима [5] Ю.И. Мышляева. Метод скоростного биградиента [6] позволяет синтезировать не только релейные, но и гладкие, степенные и комбинированные алгоритмы управления с настраиваемым многообразием, сохраняя преимущества каскадного синтеза.

Применение методов пассификации позволяет синтезировать адаптивные алгоритмы управления с неявной эталонной моделью [7]. Методика включает формирование информационного выхода в виде линейной комбинации выхода и его производных, обеспечивающего выполнение условия пассивируемости, и синтез гладкой, релейной или комбинированной обратной связи по информационному выходу. Информационный выход интерпретируется как обобщенная ошибка некоторой неявной эталонной модели, которая стремится к нулю быстрее, чем выход. Управление формируется в виде обратной связи по информационному выходу.

В [8-10] предложена методика синтеза адаптивного управления каскадными системами с интегральным виртуальным управлением на основе метода скоростного биградиента. Особенностью метода является расширение размерности выходного каскада за счёт добавления интегратора и формирование информационного выхода в форме линейного однородного уравнения по элементам вектора ошибки с характеристическим уравнением, совпадающим с характеристическим уравнением эталонной модели. При этом обеспечивается повышение качества и точности управления каскадной системой при ограничении на гладкость виртуального управления выходным каскадом. В работе рассматривается применение методики для синтеза прямого адаптивного управления каскадной системой.

## 2. Постановка задачи управления

Рассмотрим класс линейных двухкаскадных объектов управления (ОУ):

(1) $S_1: \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}(\boldsymbol{\xi})x_2,$

(2) $S_2: \dot{x}_2 = \mathbf{a}_{21}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}_1 + a_{22}(\boldsymbol{\xi})x_2 + b(\boldsymbol{\xi})u,$

где $\mathbf{x}_1 = (x_{11} \ \cdots \ x_{1n})^{\mathrm{T}} \in R^n$ – вектор состояния выходного каскада $S_1$, $x_2 \in R^1$ – фазовая координата входного каскада $S_2$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} \quad x_2)^{\mathrm{T}}$, $u \in R^1$ – управление, $\mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{I}_{n-1} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_{12}(\boldsymbol{\xi}) = (0 \ \cdots \ a_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{a}_{21}(\boldsymbol{\xi})$ – вектор $(1 \times n)$, $a_{22}(\boldsymbol{\xi})$, $b(\boldsymbol{\xi})$ – скаляры, $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$ – множество неизвестных вариантов параметров ОУ. Предполагается управляемость ОУ (1)-(2) при $\forall \boldsymbol{\xi} \in \Xi$, значения $\mathrm{sign} b(\boldsymbol{\xi})$, $\mathrm{sign} a_n(\boldsymbol{\xi})$ априорно известны.

**Целью управления** (ЦУ) является ограниченность всех траекторий замкнутой системы и достижение предельного соотношения

(3) $\mathbf{e} \to \mathbf{0}$ при $t \to \infty$,

где $\mathbf{e} = (e_1 \cdots e_n)^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*$ – ошибка слежения, $\mathbf{x}_1^* = (x_{11}^* \cdots x_{1n}^*)^{\mathrm{T}} \in R^n$ – желаемая траектория конечного каскада, заданная эталонной моделью (ЭМ) по состоянию конечного каскада в форме Фробениуса

$$\dot{\mathbf{x}}_1^* = \mathbf{A}_* \mathbf{x}_1^* + \mathbf{b}_* r,$$

или в форме «вход-выход»

(4) $g(p)x_{11}^* = g_0 r,$

где $r$ – гладкая, ограниченная вместе со своей производной функция, $\mathbf{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{I}_{n-1} \\ -g_0 & \cdots & -g_{n-1} \end{pmatrix}$ – гурвицевая матрица с заданным расположением собственных чисел, $\mathbf{b}_* = (0 \ \cdots \ g_0)^{\mathrm{T}}$, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования, $g(p) = p^n + g_{n-1}p^{n-1} + \cdots + g_0$.

## 3. Синтез алгоритма управления

Введем виртуальное управление $x_{2\mathrm{virt}}$ выходным каскадом и отклонение реального входа конечного каскада $x_2$ от виртуального управления $x_{2\mathrm{virt}}$

(5) $\sigma = x_2 - x_{2\mathrm{virt}}.$

**Этап 1.** Предполагаем, что система находится в многообразии $\sigma \equiv 0$. Расширим выходной каскада (1) путем добавления интегратора к каналу виртуального управления

(6) $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}(\boldsymbol{\xi})x_{2\mathrm{virt}},$

(7) $\dot{x}_{2\mathrm{virt}} = v$,
где $v$ – новый вход.

Относительная степень $\rho$ подсистемы (6), (7) от нового входа $v$ к $x_{11}$ равна $\rho = n + 1$. Рассмотрим задачу синтеза нового входа $v$.

Введём информационный выход в виде

(8) $y = \mathbf{g}^T\mathbf{x}_1 - g_0 r + a_n x_{2\mathrm{virt}} = \mu(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, r) + a_n x_{2\mathrm{virt}}$,

где $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}_1) = (g_0 + a_{n1} \quad g_1 + a_{n2} \quad \cdots \quad g_{n-1} + a_{nn})^{\mathrm{T}}$, $\mu(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}_1, r) = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi}_1)\mathbf{x}_1 - g_0 r$, $\boldsymbol{\xi}_1 = (a_{n1} \quad a_{n2} \quad \cdots \quad a_{nn})^{\mathrm{T}}$. Определим действующее на многообразии (8) «идеальное» желаемое виртуальное управление $\bar{x}^*_{2\mathrm{virt}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_*)$

(9) $\bar{x}^*_{2\mathrm{virt}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_*) = -a_n^{-1}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + a_n^{-1} g_0 r = -(\boldsymbol{\theta}_1^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + \theta^*_{n+1} r = -(\boldsymbol{\theta}^*)^{\mathrm{T}}\mathbf{f}$,

где $\boldsymbol{\theta}_1^* = (\theta_1^* \ldots \theta_n^*)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\theta}_* = \left((\boldsymbol{\theta}_1^*)^{\mathrm{T}}\ \theta^*_{n+1}\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор «идеальных» параметров регулятора, $\theta_i^* = a_n^{-1}\left(g_{i-1} + a_{ni}\right)$, $i = \overline{1, n}$, $\theta^*_{n+1} = a_n^{-1} g_0$, $\mathbf{f} = (\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} \quad -r)^{\mathrm{T}}$.

С другой стороны, из уравнения (8) выразим $x_{2\mathrm{virt}} = a_n^{-1}\left(y - \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + g_0 r\right)$. Вычислим невязку

$$x_{2\mathrm{virt}} - \bar{x}^*_{2\mathrm{virt}} = a_n^{-1}(y - \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + g_0 r) - (-a_n^{-1}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + a_n^{-1} g_0 r) = a_n^{-1} y.$$

Таким образом, $y$ представим в виде

(10) $y = a_n(x_{2\mathrm{virt}} - \bar{x}^*_{2\mathrm{virt}})$.

Из выражения (10) видно, что сходимость информационного выхода $y$ зависит от сходимости невязки $\left(x_{2\mathrm{virt}} - \bar{x}^*_{2\mathrm{virt}}\right)$, поэтому в дальнейшем рассмотрим информационный выход в форме

(11) $y = x_{2\mathrm{virt}} - \bar{x}^*_{2\mathrm{virt}}$.

**Этап 2.** Введём дополнительную цель управления (ДЦУ) в виде

(12) $Q_y(y) \le \Delta_y$, при $t > t_*$,

где $\Delta_y > 0$, $Q_y(y)$ – целевой функционал:

(13) $Q_y(y) = \frac{1}{2} y^2$.

Синтезируем вход расширенного конечного каскада, гарантирующий достижение ДЦУ (12), в одной из форм

(14) $v = -\gamma \operatorname{sign}(y) + \gamma_m \operatorname{sgn}(\sigma)$,

(15) $v = -\gamma y + \gamma_m \operatorname{sgn}(\sigma)$,

(16) $v = -\gamma \operatorname{sign} y$,

(17) $v = -\gamma y$,

где $\gamma > 0$, $\gamma_m > 0$.

Можно показать, что $y \to 0$ при $t \to \infty$ методом функций Ляпунова.

**Этап 3.** Заменим в (9) и (11) неизвестные параметры $\boldsymbol{\theta}_*$ настраиваемыми $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}} \quad \theta_{n+1})^{\mathrm{T}}$ так, что

(18) $\bar{x}_{2\mathrm{virt}} = -\boldsymbol{\theta}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 + \theta_{n+1} r = -\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}$,

(19) $y = x_{2\mathrm{virt}} - \bar{x}_{2\mathrm{virt}}$.

Вторичные параметры $\boldsymbol{\theta}$ вычисляются на основе оценок параметров конечного каскада и коэффициентов $g_0, \cdots, g_{n-1}$. Рассмотрим синтез прямого адаптивного управления.

В качестве ЦФ выберем квадратичную форму от ошибки слежения

(20) $Q_e(\mathbf{e}) = 0{,}5\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{e}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}} > 0$.

Найдем производную по времени ЦФ (20) в силу системы, состоящей из подсистемы (6) с входом $\bar{x}_{2\mathrm{virt}}$ (18) и ЭМ (4)

(21) $\dot{Q}_e = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 - \dot{\mathbf{x}}_1^*) + \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{a}_{12}\bar{x}_{2\mathrm{virt}} = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 - \dot{\mathbf{x}}_1^*) - z\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}$

где $z = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{a}_{12} = a_n \sum_{i=1}^{n} e_i h_{in}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$ – решение уравнения Ляпунова

$$\mathbf{HA}_* + \mathbf{A}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = -\mathbf{G},$$
$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}} > 0.$$

Из (21) видно, что при известных параметрах $\boldsymbol{\theta}_*$ ЦУ (3) достигается и

$$\dot{Q}_e(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\bar{x}_{2\mathrm{virt}}^* - \mathbf{A}_*\mathbf{x}_1^* - \mathbf{b}_* r) = \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{HA}_*\mathbf{e} \le -\rho_e Q_e(\mathbf{e}),$$

где $\rho_e = \lambda_{\min}(\mathbf{G})/\lambda_{\max}(\mathbf{H}) > 0$ – минимальное и максимальное собственные числа матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ соответственно. Выберем алгоритм настройки неизвестных параметров в форме скоростного градиента

(22) $\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{\Gamma}_e \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \dot{Q}_e(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{n} e_i h_{in} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_e \mathbf{f}, \dot{\boldsymbol{\theta}}_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i h_{in} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{1e} \mathbf{x}_1, \dot{\theta}_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} e_i h_{in} \tilde{\gamma}_{e(n+1)} r,$

где $\boldsymbol{\Gamma}_e = \mathrm{diag}\left\{\gamma_{e1}, \ldots, \gamma_{e(n+1)}\right\} > 0, \tilde{\gamma}_{ei} = a_n \gamma_{ei}$.

**Этап 4.** Введем ДЦУ в виде неравенства

$R(\sigma) \le \Delta_\sigma$ при $t \ge t_*$, $\Delta_\sigma > 0$, где

(23) $R(\sigma) = 0{,}5\sigma^2$.

Выберем алгоритм управления системой, обеспечивающий достижение ДЦУ (23):

(24) $u = -\gamma \cdot \mathrm{sign}(b) \cdot \mathrm{sign}(y)$

Доказано, что для замкнутой системы существует функция Ляпунова

$$V(\mathbf{e}, y, \sigma, \boldsymbol{\theta}) = Q_y(y) + R(\sigma) + Q_e(\mathbf{e}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Gamma}_e^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^*),$$

где первые три слагаемые определяются (13, (20), (23).

# 4. Заключение

В работе предложено семейство алгоритмов прямого адаптивного управления линейной двухкаскадной системой. Алгоритмы синтезированы на основе метода скоростного биградиента с интегральным виртуальным алгоритмом. Особенностью метода является объединение интегрального управления и пассификации для синтеза виртуального управления выходным каскадом, а также обеспечение гладкости виртуального управления при конечном времени достижения информационного выхода.

Описываются этапы синтеза алгоритма, приводится функция Ляпунова. Доказано, что в замкнутой системе решается задача слежения и возникает устойчивый скользящий режим.

Можно показать, что алгоритмы обеспечивают повышение качества управления и уменьшают ошибку слежения.

# Список литературы


1. Зубов В.И. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями // Изв. вузов. Математика. 1958. № 1. С.80-88.
2. Bartolini G., Ferrara A., and Usai E. Chattering avoidance by second order sliding mode control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1998. Vol. AC-43, No. 2. P. 241-246.

3. Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control // International Journal of Control. 1993. Vol. 58, No. 6. P. 1247-1263.
4. Мишаков В.В., Мышляев Ю.И. Векторное управление редукторным электромеханическим усилителем момента при неизвестной нагрузке // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2008. № 4 С. 32-40.
5. Мышляев Ю.И. Алгоритмы управления линейными объектами в условиях параметрической неопределённости на основе настраиваемого скользящего режима // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. №2. С. 111-116.
6. Мышляев Ю.И. Алгоритмы скоростного биградиента // Труды XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 16-19 июня 2014. С. 2320-2331.
7. Andrievsky B.R., Fradkov A.L. // Proceedings of IEEE International Conference on Control and Applications, Glasgow, UK. 1994. Vol. 2. P. 1171-1174.
8. Мышляев Ю.И., Нгуен Ти Тхань, Финошин А.В. Робастное управление каскадной системой с интегральным виртуальным алгоритмом // Труды ФГУП «НПЦАП». Системы и приборы управления. 2018. № 3. С. 75-78.
9. Мышляев Ю.И., Нгуен Ти Тхань, Финошин А.В. Непрямое адаптивное управление каскадными системами с интегральным виртуальным алгоритмом // Автоматизация. Современные технологии. 2018. Т. 72, № 9. С. 921-927.
10. Мышляев Ю.И., Нгуен Ти Тхань, Финошин А.В. Управление каскадными объектами с интегральным виртуальным настраиваемым скользящим режимом // Известия ТулГУ. 2018. № 9. С. 57-69.