УДК 62-503.54, 51-74

СИНТЕЗ ГЕНЕРИРУЮЩЕЙ МОДЕЛИ ЗАДАННОГО СИГНАЛА

А.В. Финошин
Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана, Калужский филиал
Россия, 248000, Калужская область, Калуга, ул. Баженова, д. 2
E-mail: finoshin@bmstu.ru

Ключевые слова: генерирующая модель, слежение, аппроксимация, эталонная модель.

Аннотация: Описывается методика синтеза генерирующей модели и обосновывается выбор генерирующей модели в качестве эталонной модели для синтеза алгоритмов слежения. Приводится пример синтеза эталонной модели, демонстрирующий преимущества метода генерирующей модели.

1. Введение

Одним из подходов к решению задач слежения является метод эталонной модели. Синтез эталонной модели заключается в определении параметров, входа и начальных условий динамической системы заданной размерности таким образом, чтобы выход эталонной модели совпадал с желаемой траекторией движения. Традиционно эталонная модель задаётся линейным неоднородным дифференциальным уравнением с быстро затухающим свободным движением и с совпадающим с желаемых выходом вынужденным движением. Также эталонную модель можно выбрать в виде цепочки n-интеграторов, на вход которой поступает n-ая производная желаемого сигнала. Если желаемый сигнал имеет сложную форму или задан в табулированном или графическом виде, вход эталонной модели необходимо рассчитать, для чего нужно аппроксимировать желаемый сигнал. Существенным ограничением в использовании классических методов аппроксимации (ряды Фурье, полиномы Лежандра и др.) является то, что они эффективны для ограниченного класса функций, содержащих только периодические функции или только полиномы. Рассмотрим использование генерирующей модели (ГМ) в качестве эталонной модели.

Под ГМ будем понимать динамическую систему заданной размерности, выходом которой является желаемый сигнал [1]. Метод ГМ позволяет найти корни обобщённого характеристического уравнения авторегрессионной модели желаемого сигнала и сформировать на их основе базисные функции [2]. Данный класс разложения является более богатым, что отчетливо видно для сигналов, включающих в себя не только периодические функции, но и экспоненциальные затухания или колебания с возрастающей амплитудой, где рассмотренные классические методы аппроксимации непрактичны или неприменимы.

В отличие от известных методов аппроксимации, определяются не коэффициенты разложения по заданному базису, а корни характеристического уравнения желаемого сигнала, которые формируют базисные функции. Даже для элементарных сигналов ГМ позволяет повысить точность слежения и уменьшить запаздывание по сравнению с методом эталонной модели [3].

2. Метод генерирующей модели

2.1. Постановка задачи

Пусть желаемый сигнал f задан графически или в виде сеточной функции $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_N\}$, где f_i – значения функции в момент времени t_i, $i = 1 \ldots N$. Требуется определить линейную динамическую модель заданной размерности, выход которой совпадает с заданной точностью с желаемым сигналом f.

2.2. Методика синтеза генерирующей модели

Методика синтеза ГМ основана на методе структурного погружения, который позволяет определить с заданной точностью порядок, а затем и параметры авторегрессионной модели желаемого сигнала, последовательно увеличивая порядок модели измеряемого сигнала.

Предполагается, что задающее воздействие может быть представлено на ограниченном временном окне следующей авторегрессионной моделью:

(1) $$f_k = \sum_{j=1}^{N} a_{N,j} f_{k-j},\ k = \overline{1, 2N+1},$$

где N, $a_{N,j}$ – порядок и параметры авторегрессионной модели.

Методика синтеза ГМ состоит из трех этапов. На первом этапе определяется размерность авторегрессионной модели (1). Размерность N определяется из условия невырожденности матрицы Z:

$$Z = \begin{pmatrix} f_k & f_{k-1} & \cdots & f_{k-N} \\ f_{k-1} & f_{k-2} & \cdots & f_{k-N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k-N} & f_{k-N-1} & \cdots & f_{k-2N-1} \end{pmatrix}.$$

На втором этапе определяются параметры $a_{N,j}$. На третьем этапе для разностного уравнения (1) формируется характеристическое уравнение для исходного сигнала в z-области:

(2) $$Q(z) = \prod_{i=1}^{N}(z - \lambda_{z_i}) = z^N - \alpha_{N,1} z^{N-1} - \ldots - \alpha_{N,N-1} z - \alpha_{N,N} = 0,$$

где λ_{z_i} – корни характеристического уравнения. Найдем корни характеристического уравнения в непрерывной области λ_{s_i}, используя формулу z-преобразования $\lambda_{s_i} = \frac{1}{h}\ln\lambda_{z_i}$, где h – шаг дискретизации. Полученные корни формируют характеристическое уравнение в s-области

(3) $$P(s) = \prod_{i=1}^{N}(s - \lambda_{s_i}) = s^N + \beta_{N-1} s^{N-1} + \ldots + \beta_{N-2} s + \beta_0 = 0.$$

Характеристическое уравнение позволяет представить задающий сигнал как сумму порождающих функций, связанных с корнями этого уравнения:

(4) $$f(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}(a_i \cos\omega_i t + b_i \sin\omega_i t) = \sum_{i=1}^{r}(c_i e^{(\lambda_i + j\omega_i)t} + c_i^* e^{(\lambda_i - j\omega_i)t}),$$

где a_i, b_i, c_i, c_i^* – константы: $a_i = 2\sum_{k=0}^{p_i-1}\tilde{c}_{ik} t^k$; $b_i = -2\sum_{k=0}^{p_i-1}\tilde{c}_{ik}^* t^k$; $c_i = \tilde{c}_{ik} + j\tilde{c}_{ik}^*$; $c_i^* = \tilde{c}_{ik} - j\tilde{c}_{ik}^*$; p_i – кратность i-го корня или пары комплексно-сопряженных корней, r – число различных корней.

Таким образом, метод структурного погружения позволяет определить наименьшую размерность N модели и сформировать базисные функции сигнала, справедливые для ограниченного интервала времени $t \in [0, T]$, где $T = (2N+1)h$, h – период и шаг дискретизации соответственно.

3. Пример расчёта генерирующей модели

3.1. Синтез генерирующей модели

В качестве примера, демонстрирующего преимущества использования рассмотренного метода, рассмотрим расчёт ГМ для экспоненциально затухающего гармонического сигнала.
Желаемый выход задан дискретным значением функции

(5) $$f(t) = e^{-\alpha t}\sin\omega t, \alpha = 1, \omega = 10$$

с шагом дискретизации сигнала $h = 0{,}01$. На рис. 1 представлен график задающего воздействия $f(t)$.

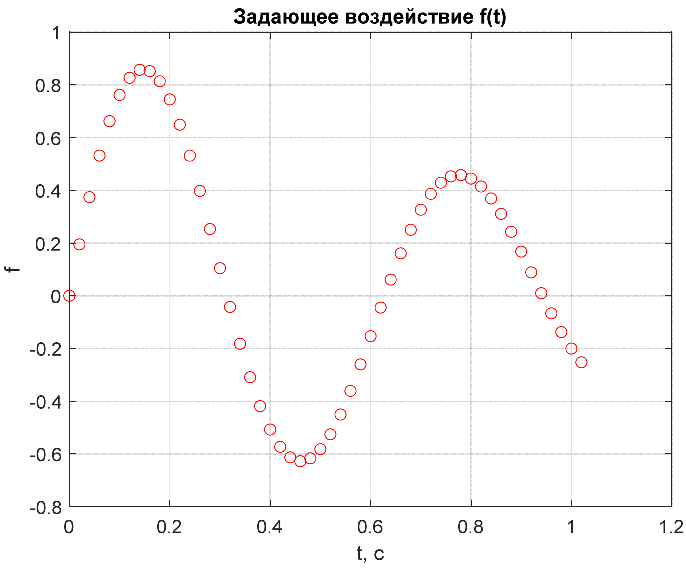

Рис. 1. График задающего воздействия.

Получим характеристический многочлен измеряемого сигнала в дискретной области:

$$Q(z) = z^2 - 1{,}97z + 0{,}98.$$

Корни характеристического уравнения $Q(z)$ равны $\lambda_{z_1} = -0{,}9851 + 0{,}0988i$, $\lambda_{z_2} = -0{,}9851 - 0{,}0988i$. Соответствующие корни в непрерывной области $\lambda_{s_1} = -1 + 10i, \lambda_{s_2} = -1 - 10i$. Они формируют характеристический многочлен

$$P(s) = s^2 + 2s + 101.$$

Тогда генерирующая модель принимает вид:

(6) $$\dot{\mathbf{x}}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -101 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\Gamma}, \mathbf{x}_{\Gamma}(0) = [0 \quad 10]^{\mathrm{T}}.$$

Начальные условия $\mathbf{x}_{\Gamma}(0)$ определяются путем дифференцирования желаемого сигнала либо аналитически, если функция задана аналитически, либо численно, если функция задана графически или табулировано. Отметим также, что полученные корни характеристического уравнения формирует базисную функцию вида (4), которая совпадает с заданным сигналом (5). Результаты численного интегрирования ГМ (6) представлены на рис. 2.

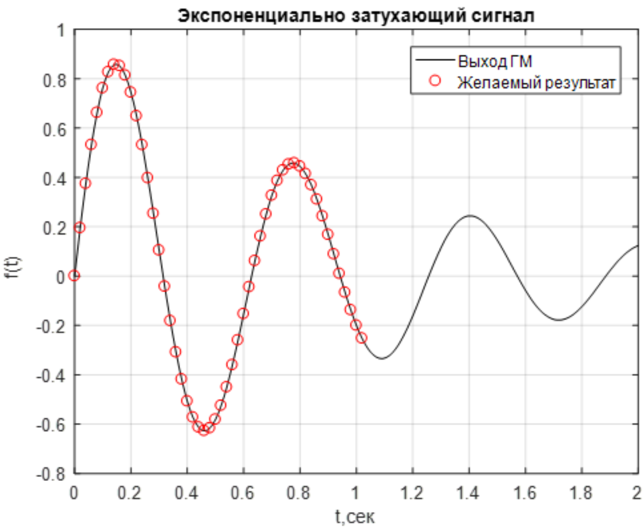

Рис. 2. Выход генерирующей модели и заданный сигнал.

3.2. Синтез эталонной модели

Проведем аппроксимацию сигнала (5) в базисе степенных функций методом наименьших квадратов с заданной точностью

(7) $$p(t) = -109t^{12} + 1352t^{11} - 7269t^{10} + \ldots - 97t^2 + 13t.$$

Выберем эталонную модель в виде линейной динамической системы с постоянными коэффициентами

(8) $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$$

Зададим размерность ЭМ $n = 2$. Рассмотрим первый способ задания ЭМ: цепочка интеграторов со входом u, определяемом как n-ая производная задающего сигнала. Начальные условия определяются путем нахождения соответствующей производной полинома (7) в нуле. Тогда ЭМ принимает вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = [0 \quad 13]^{\mathrm{T}},$$

$$u(t) = -14410t^{10} + 148740t^9 - 65420t^8 + \ldots - 63376t^2 + 4716t - 194.$$

Выберем эталонную модели в виде динамической системы вида (8) с быстро затухающим собственным движением и вынужденным движением, стремящимся в заданному сигналу (5). В этом случае матрица $\mathbf{A}$ – гурвицева матрица с «быстрыми» собственным числами, например:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2000 & -120 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2000 \end{bmatrix}.$$

Вход модели (8) совпадает с аппроксимацией заданного сигнала (7) $u(t) = p(t)$. Недостатком использования традиционных эталонных моделей является сложность выбора базиса для аппроксимации заданного сигнала и зависимость точности эталонной модели от количества слагаемых в разложении.

3.3. Синтез генерирующей модели заданной размерности

Предположим, требуется синтезировать эталонную третьего порядка, выходом которой является сигнал, представленный на рис. 1. Проведем синтез методом генерирующей модели. Добавим к найденным в 3.1 корням характеристического уравнения в непрерывной области «быстрый» корень, например, $\lambda_{s_3} = -100$. Корни формируют характеристический многочлен ГМ

$$P(s) = s^3 + 102s^2 + 301s + 10100.$$

Тогда генерирующая модель принимает вид:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10100 & -301 & -102 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\Gamma}, \mathbf{x}_{\Gamma}(0) = [0 \quad 10 \quad -20]^{\mathrm{T}}.$$

4. Заключение

В работе рассмотрено применение метода синтеза генерирующей модели для формирования эталонной модели. На примере экспоненциально затухающего гармонического сигнала продемонстрированы преимущества выбора генерирующей модели по сравнению с эталонной моделью, синтезированной традиционными способами. Уменьшение сложности модели и повышение точности достигается за счет метода, основанного не на разложении сигнала по заранее выбранному базису, а формировании базиса на основе корней характеристического уравнения авторегрессионой модели заданного сигнала.

Недостатком метода является невозможность заранее определить размерность ГМ. В случае, если размерность ГМ не совпадает с желаемой размерностью, равной размерностью объекта управления, выполняются преобразования, описанные в [4].

Список литературы

1. Утробин Г.Ф., Ю.И. Мышляев, В.И. Краснощеченко, С.В. Мышляева. Фильтрация дискретных сигналов методом структурного погружения // Труды ФГУП «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина». Системы и приборы управления. 2016. № 2. С. 36-44.
2. Мышляев Ю.И. Об одном подходе к решению задачи слежения с желаемой спектральной динамикой // Труды ФГУП «НПЦАП им. академика Н.А. Пилюгина». Системы и приборы управления. 2016. № 4. С. 5-11.
3. Мышляев Ю.И., Кхаунг П.Ч., Долгов Я.А. Синтез алгоритмов слежения для линейных объектов с генерирующей моделью задающего сигнала // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 2. С. 72-79.
4. Finoshin A., Dolgov J. Synthesis of a Generative Model with the Reference Signal // J Math Sci. 2023. Vol. 269. P. 796-802. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06317-0.