УДК 681.5

УПРАВЛЕНИЕ ГОМЕОСТАЗИСОМ

А.Л. Фрадков
Институт проблем машиноведения РАН
Россия, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61
E-mail: fradkov@mail.ru

Ключевые слова: управление, гомеостазис, инварианты, скоростной градиент.

Аннотация: Обсуждается новый класс задач управления - управление гомеостазисом. Управление гомеостазисом можно рассматривать как адаптивное управление с заданным целевым множеством, в частности, как стабилизацию значений некоторой функции, являющейся инвариантом свободной системы. Рассматривается более общий класс задач: выравнивание значений двух или более целевых функций, каждая из которых является инвариантом соответствующей подсистемы сложной системы. Предложен подход к синтезу алгоритмов управления на основе модифицированного метода скоростного градиента и установлены условия его применимости.

1. Введение

Гомеостазис (гомеостаз) – удивительное свойство живых существ и сообществ, которое остается не до конца понятым и по сей день. Впервые термин *гомеостазис* ввёл в 1929 году американский физиолог Уолтер Кэннон (от греч. «хомойос»- тот же, подобный, и «стазис»- состояние). Мысль о том, что постоянство внутренней среды является необходимым условием для нормального существования любого живого организма высказал ещё в 1857 году французский физиолог Клод Бернар. Понятие гомеостазиса играет важную роль в биологии, медицине и других науках и означает поддержание состояния внутренней среды системы в области нормального функционирования при изменении внешних условий. Если гомеостазис в системе не может быть обеспечен внутренними ресурсами, возникает вопрос о обеспечении его за счет внешних сил - управлении гомеостазисом.

Существующие в организмах принципы регуляции биологических процессов имеют много общего с принципами управления в неживых, технических системах. И в том, и в другом случае стабильность системы достигается с помощью определенной формы управления. Поэтому задача об управлении гомеостазисом относится к области кибернетики – науки об управлении и связи в живом организме и машине, как ее определил Н.Винер в 1948 г [1].

Понятия гомеостазиса и гомеостата приобрели популярность в кибернетике в 1950-х гг, когда английский психиатр и кибернетик У.Р.Эшби построил машину, демонстрировавшую устойчивое функционирование при изменении внешней среды и связей между элементами и назвал ее гомеостатом [2, 3]. Как отмечал Г.Паск [4], гомеостат Эшби, в отличие от многих имитаций, внешне ведущих себя подобно мозгу, был создан, чтобы понять внутреннее устройство мозга. Поэтому гомеостат Эшби до сих пор привлекает внимание специалистов и считается одним из прототипов адаптивного регулирования в природе и технике [5]. Собственно, о связи гомеостата с адаптивным поведением писал еще сам Эшби [3]. Однако развитие адаптивного управления в XX веке позволило рассмотреть новые модели и методы, устанавливающие более многообразные связи управления и гомеостазиса.

Во второй половине XX века процессы гомеостазиса интенсивно изучались в медицине, при этом активно использовались математические модели. Построение математических моделей позволяет связать представления биологов, математиков и инженеров и приблизиться к практическому использованию теоретических исследований в медицине. Были разработаны математические модели гомеостатического поведения уровней глюкозы и инсулина в крови [6, 7], уровней кальция [8], межклеточного железа [9] и ряд других показателей.

Явление гомеостазиса может пониматься настолько широко и имеет настолько важные методологические аспекты, что в последние несколько десятилетий появилось множество работ, обобщающих представления о гомеостазисе на другие классы систем: технические, общественные и др. В целом ряде исследований гомеостатические принципы из иммунологии применялись к проектированию роботов [10, 11], сетей связи [12] и других технических систем.

Наиболее общие представлении о математических моделях гомеостазиса были развиты недавно в работе [13], где дается следующее общее определение.

Гомеостазис имеет место в биологической или химической системе, когда некоторая выходная переменная остается приблизительно постоянной при изменении входной переменной на некотором интервале.

Разумеется, это определение применимо не только к биологическим или химическим системам. Перспективу еще большего расширения областей инвариантности при гомеостазисе предоставляет введение управляющих переменных и применение методов теории управления. Дальнейшее обобщение может быть направлено на поддержание при гомеостазисе не значения какого-то инварианта, а некоторого соотношения между несколькими инвариантами системы.

В настоящей работе рассматривается класс систем, обладающих инвариантами и предлагается общий способ управления, обеспечивающий сохранение соотношений между инвариантами системы при изменении начальных условий и параметров внешней среды.

2. Постановка задачи

В общем случае под гомеостазисом будем понимать способность организмов и систем сохранять свое состояние в области нормального функционирования при изменении внешних условий. Обозначим набор переменных, характеризующих состояние системы в момент времени t, через $x(t) \in R^n$, а область нормального функционирования обозначим через $X^* \subset R^n$. Тогда условие гомеостазиса можно записать в виде

$$x(t) \in X^*. \tag{1}$$

Рассмотрим систему описываемую дифференциальными уравнениями состояния

$$dx/dt = F(x(t), v),\ y(t) = h(x(t), v) \tag{2}$$

где $v \in D \subset R^d$ - вектор внешних воздействий (параметров системы или внешней среды), $y(t) \in R^l$ вектор измеряемых выходов системы.

Пусть для любого $v \in D$ существует вектор $\bar{x}(v)$, являющийся равновесием системы $F(\bar{x}(v), v) = 0$. Будем говорить, что система обладает гомеостазисом (сильным гомеостазисом) по y в D, если $\nabla_v y(\bar{x}(v)) = 0$ для всех $v \in D$. Иначе говоря, это означает, что функция $y(\bar{x}(v))$ явлется инвариантом (сохраняет свое значение) при изменении $v \in D$, а множество X^* является множеством постоянного уровня функции $h(x)$.

Теперь предположим, что на систему (2) может воздействовать управление, т.е. математическая модель системы имеет вид

$$dx/dt = F(x(t), u(t), v(t)),\ y(t) = h(x(t)), \tag{3}$$

где $u(t) \in R^m$ - вектор управляющих переменных. Пусть для любого $v \in D$ существуют векторы $\bar{u}(v), \bar{x}(v)$ такие, что

$$F(\bar{x}(v), \bar{u}(v), v)) = 0,\ \nabla_v y(\bar{x}(v)) = 0, \tag{4}$$

при $v \in D$. Свойство (4) означает, что $y(\bar{x}(t), v)$ является инвариантом системы при воздействии управления.

Очевидно, проблема состоит в том, чтобы найти функцию управления $u^* = U^*(v)$, обеспечивающую инвариантность выхода $y(\bar{x}(t), v)$. Сложность проблемы в том, что значение v обычно неизвестно и найти правильное u^* в каждый момент времени не представляется возможным. Поэтому цель управления заменяется на асимптотическую цель

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y^*, \tag{5}$$

для любых $v \in D$, где D - известное множество возможных значений v, а управление $u(t)$ строится на основе измерения в каждый момент времени текущих значений вектора состояния $x(t)$ или вектора выходов $y(t)$.

Таким образом, приходим к стандартной задаче адаптивного управления. Ей посвящено огромное количество работ и она адекватна многим задачам достижения гомеостазиса. Однако общность задачи, с одной стороны, не дает возможности сформулировать ее конструктивное решение, а, с другой стороны, не учитывает специфику многих конкретных задач. Множество X^* может вырождаться в точку, может задавать какие-то желаемые значения для переменных организма, определяющих состояние гомеостазиса и т.д.

Более общая формулировка цели (5) для класса моделей (3) требует не стремления траектории системы в окрестность желаемой точки, а выполнения определенного соотношения между переменными системы, например

$$\lim_{t\to\infty} H(x(t)) = y^*, \tag{6}$$

где $H(x)$ - заданная функция. Соотношение (6) соответствует стабилизации решений на заданной поверхности и может быть названо частичной стабилизацией системы [15]. Ниже рассматривается еще более общая цель: обеспечение заданного соотношения между инвариантами системы. Для простоты неизвестные возмущения $v \in D$ опускаются, их можно учесть стандартными методами адаптивного управления.

3. Управление соотношением инвариантов нелинейных систем

Рассмотрим набор нелинейных, аффинных по управлению систем

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + g_i(x_i)u_i, y(i) = h_i(x_i), i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Поставим задачу достижения при $t \to \infty$ заданного соотношения между выходами подсистем. Не умаляя общности, ее можно сформулировать как обеспечение выполнения асимптотических соотношений

$$y_i(t) - y_{i+1}(t) \to 0, \quad i = 1, \ldots, N-1 \tag{8}$$

при $t \to \infty$, где считается, что $y_{N+1} = y_1$. Введем целевую функцию

$$Q(x) = (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + \ldots (y_N - y_{N+1})^2, \tag{9}$$

Очевидно, при $Q(x) = 0$ все выходы подсистем совпадают и цель (8) достигается.

Для синтеза управления применим модифицированный метод скоростного градиента, вычисляя градиент по u не от скорости изменения целевой функции $\dot{Q}(x, u)$, как в [14], а от ее верхней оценки

$$u_i = -\gamma(2g_i \nabla h_i^T)(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}), i = 1, \ldots, N \tag{10}$$

Справедливы следующие условия достижения цели в синтезированной системе.

Теорема 1. *При выполнении условий*

(A1) для любой точки $x_i \in X \subset R^{Nn}$ выполняются неравенства $L_{f_i(x_i)}Q(x) \leqslant 0$, означающие устойчивость невозмущенных систем по отношению к функции $Q(x)$ (пассивность).

(A2) для любой точки x_i, из множества $x \in X : L_g Q(x) = 0$, такой, что тождества $L_g(x_i)Q(x) = 0$ выполняются при $L_{f_i(x_i)}h_i(x_i) \equiv 0$.

для системы (7) с алгоритмом управления (10) выполняется неравенство $Q(x(t)) \leqslant Q(x(0))$, $\forall t \geqslant 0$ и обеспечивается соотношение $u(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Кроме того, обеспечивается альтернатива: на траектории $x(t)$ либо достигается цель управления (8), либо $g_i(x_i)\nabla h_i(x_i)^T \to 0$ при $t \to \infty$ для некоторого $i = 1, \ldots, N$.

Если, кроме того, выполнены условия

(A3) $dimS(x) = l$ при $Z(x) = 0$, $x \in \Omega_0$, где $S(x) = span\{Z(x), L_f Z(x), L_f^2 Z(x), \ldots, \}$

(A4) Существует $\varepsilon > 0$, такое, что любая связная компонента множества D_ε ограничена, где $D_\varepsilon = \Omega_0 \cap \{x : |detZ(x)Z(x)^T| < \varepsilon\}$.

то исходная цель (8) достигается.

Доказательство. При использовании закона управления (10) и при выполнении условий (A1), (A2) выполнены соотношения

$$\dot{Q}(x, u) = -\gamma \sum_{i=1}^{N} ((2g_i \nabla h_i^T)^2 (2y_i - y_{i-1} - y_{i+1})^2 \leqslant 0,$$

откуда функция $Q(x(t)$ ограничена: $Q(x(t) \leqslant Q(x(0)$. Поскольку $Q(x(t))$ не возрастает, существует предел $\lim_{t\to\infty} Q(x(t)) = Q_\infty$. Если $Q_\infty = 0$, то цель достигается и теорема доказана. Если $Q_\infty > 0$, то, значит, хотя бы одно слагаемое вида $(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1})$ не стремится у нулю и, следовательно, хотя бы одна функция $g_i(x_i)\nabla h_i(x_i)^T$ стремится к нулю. При дополнительном выполнении условий (A3),(A4), аналогично [15] устанавливается достижение исходной цели (8).

4. Заключение

Поставлена задача обеспечения заданного соотношения инвариантов в нелинейных системах и показана возможность ее решения на основе модифицированного метода скоростного градиента. Предложены условия достижения цели управления для произвольного числа подсистем. Полученные результаты могут иметь применения в медицине и в технике, поскольку применимы как к живым организмам, так и к техническим системам.

Работа выполнена в ИПМаш РАН и поддержана грантом РНФ 23-41-00060.

Список литературы

1. Wiener N. Cybernetics: or, control and communication in the animal and the machine. MIT Press, 1948.
2. Ashby W. R. Experimental Homeostat. Electroencephalography And Clinical Neurophysiology. 1949, Vol. 1, No. 1. P. 116–117.
3. Ashby W. R. Design for a Brain: The origin of adaptive behaviour / 2nd ed. Chapman & Hall, 1960.
4. Pask G. An approach to cybernetics. New York: Harper & Brothers, 1961.
5. Herrmann J. M., Holicki M., Der R. On Ashby's homeostat: A formal model of adaptive regulation // From animals to animats 8: Proc. 8th Int. Conf. Simulation of Adaptive Behavior. 2004. P. 324–333.
6. Lombarte M., Lupo M., Campetelli G. et al. Mathematical model of glucose-insulin homeostasis in healthy rats // Mathematical Biosciences. 2013. Vol. 245, No. 2. P. 269–277.
7. Gaohua L., Kimura H. A mathematical model of brain glucose homeostasis // Theoretical biology & medical modelling. 2009. Vol. 27, No. 6. P. 26.
8. Raposo J.F., Sobrinho L.G., Ferreira H.G. A minimal mathematical model of calcium homeostasis // Journal of Clinical Endocrinology and Metabolism. 2002. Vol. 87, No. 9. P. 4330–4340.
9. Chifman J., Kniss A., Neupane P. et al. The core control system of intracellular iron homeostasis: A mathematical model // Journal of Theoretical Biology. 2012. Vol. 300. P. 91–99.
10. Vargas P., Moioli R., de Castro Leandro N. et al. Artificial Homeostatic System: A Novel Approach // Advances in Artificial Life / Ed. by Mathieu S. Capcarrere, Alex A. Freitas, Peter J. Bentley et al. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. P. 754–764.
11. Man K., Damasio A. Homeostasis and soft robotics in the design of feeling machines // Nature machine intelligence. 2019. Vol. 1. P. 446–452.
12. Oka M., Abe H., Ikegami T. Dynamic homeostasis in packet switching networks // Adaptive Behavior. 2015. Vol. 23, No. 1. P. 50–63.
13. Golubitsky M., Stewart I. Homeostasis, singularities, and networks // J. Math. Biol. 2017. Vol. 74. P. 387—407.
14. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Метод скоростного градиента и его приложения // Автоматика и телемеханика. 2021. № 9. С.3-72.
15. Shiriaev A.S., Fradkov A.L. Stabilization of invariant sets for nonlinear non-affine systems // Automatica. 2000. Vol. 36, No. 11. P. 1709–1715.