УДК 662.642:621.926.7

РАСЧЕТ ТИПОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ УСЛОВИЙ РОБАСТНОЙ СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ

Л.М. Яковис
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
E-mail: leonid@yakovis.com

П.С. Степанов
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
Россия, 190013, Санкт-Петербург, Московский проспект, 24-26/49 литера А
E-mail: stepanovpash@mail.ru

П.Я. Стронгин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
E-mail: strongin97@mail.ru

Ключевые слова: типовой регулятор, многосвязный объект управления, робастность, сверхустойчивость.

Аннотация: Работа посвящена расчету робастных настроек многомерных типовых регуляторов для многосвязных линейных динамических объектов при параметрической неопределенности их динамических моделей. Предлагается структура регулятора, представляющего собой последовательное соединение матрицы статических коэффициентов усиления и скалярного типового регулятора. Получены достаточные условия существования регулятора рассматриваемой структуры, обеспечивающего робастную устойчивость замкнутой системы управления. Эти условия опираются на проверку условий робастной сверхустойчивости для замкнутой системы, полученной замыканием соответствующего исходному статического объекта многомерным И-регулятором предложенной структуры, причем указан способ такой проверки.

1. Введение

Расчету параметров типовых (И, ПИ и ПИД) регуляторов в детерминированных условиях, когда известна математическая модель управляемого объекта (ОУ), посвящена обширная литература [1, 2]. Более сложную и менее изученную задачу представляет собой робастная настройка типовых регуляторов для ОУ, функционирующих в условиях значительной неопределенности [3]. Рассматривается вариант параметрической неопределенности, когда параметры модели ОУ известны с точностью до интервалов их возможных значений. Изучается наиболее распространенная задача поддержания заданного уровня выходной переменной в условиях неконтролируемых возмущений или (и) перевода выходной переменной ОУ на другой заданный уровень.

2. Робастная настройка типовых регуляторов

2.1. Базовая модель объекта управления

Пусть уравнения системы «объект H – регулятор W», записанные с использованием аппарата матричных передаточных функций, имеют вид

(1) $$\mathbf{x} = \mathbf{H}(p)\mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n},$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{W}(p)(\mathbf{y}^* - \mathbf{y}).$$

Блок-схема соответствующей системы управления приведена на рис. 1.

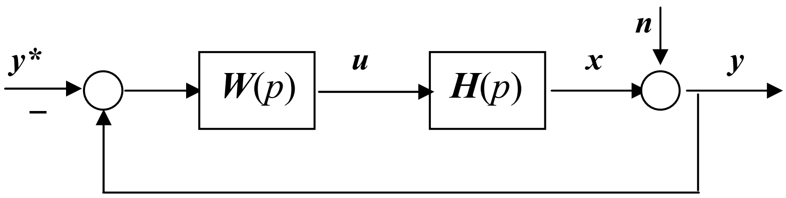

Рис. 1. Блок-схема системы управления.

Рассмотрим задачу стабилизации на уровне $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ выходной переменной ОУ (1) с матричной передаточной функцией $\mathbf{H}(p)$, находящегося под действием управляющих воздействий $\boldsymbol{u}$, вырабатываемых регулятором $\mathbf{W}(p)$, и неконтролируемых возмущений $\boldsymbol{n}$. Линеаризованные модели достаточно общего вида, пригодные для описания широкого круга процессов, могут быть записаны в виде передаточной матрицы $\mathbf{H}(p) = [h_{ij}(p)e^{-p\tau_{ij}}]$, которую будем в дальнейшем полагать квадратной, где $h_{ij}(p)$ представляют собой устойчивые дробно-рациональные передаточные функции, а τ_{ij} – транспортные или (и) информационные запаздывания [2]. В дальнейшем будем предполагать выполненными условия управляемости ОУ в области возможных значений его параметров [4]. Задача настройки многомерного ПИД-регулятора $\mathbf{W}(p) = \mathbf{A} + \mathbf{B}/p + \mathbf{C}p$ заключается в определении матричных коэффициентов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$и $\mathbf{C}$(для И-регулятора A =$\mathbf{C} = \mathbf{0}$, для ПИ-регулятора $\mathbf{C} = \mathbf{0}$) из условия минимума того или иного показателя качества управления. На практике параметры расчетной модели могут сильно отличаться от истинных и в такой распространенной ситуации необходимо уметь настроить регуляторы так, чтобы они обеспечивали работоспособность системы при всех возможных вариациях параметров в рамках известной области неопределенности $\boldsymbol{G}$ – в этом состоит суть робастного управления.

2.2. Задача робастного управления

Пусть система управления характеризуется вектором параметров модели ОУ$\mathbf{Z}$ и вектором параметров регулятора $\mathbf{Q}$. Будем считать, что заданы показатель качества управления (например, показатель, характеризующий переходный процесс в замкнутой системе при изменении задания на выходные переменные) $J = \varphi(\mathbf{Z}, \mathbf{Q})$, а также область возможных значений неизвестных параметров объекта управления $\mathbf{Z} \in \mathbf{G}$.

При «традиционном» подходе к расчету регуляторов номинальные настройки регулятора $\mathbf{Q}_{nom}$ рассчитываются в рамках одной из известных методик в зависимости от параметров расчетной модели управляемого объекта $\mathbf{Z}_r$, то есть $\mathbf{Q}_{nom} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}_r)$, причем$\mathbf{Z}_r$соответствует центральной точке области неопределенности $\mathbf{G}$. При «робастном» подходе постоянные настройки регулятора $\mathbf{Q}_{rob}$, обеспечивающие оптимальное (для определенности наименьшее) значение показателя J «в худшем случае», могут быть найдены в результате решения минимаксной задачи определения

(2) $$J_{\text{minmax}} = \min_{Q}\max_{Z \in G}\varphi(\mathbf{Z}, \mathbf{Q}).$$

Применительно к многомерному ОУ с передаточной матрицей $\mathbf{H}(p) = [h_{ij}(p)e^{-p\tau_{ij}}]$ в варианте интервальной неопределенности коэффициентов передаточных функций задача (2) весьма сложна [3], поэтому в дальнейшем будет рассмотрен подход к ее приближенному решению.

2.3. Робастное управление статическим объектом

Предварительно рассмотрим задачу робастного управления статическим ОУ, соответствующим исходному динамическому объекту (1). Таким образом, ставится задача управления ОУ с передаточной матрицей $\mathbf{K} = \mathbf{H}(0)$, причем элементы матрицы $\boldsymbol{K}$ известны с точностью до интервалов их возможных значений, то есть $\underline{k}_{ij} \le k_{ij} \le \bar{k}_{ij}$. Для обеспечения важного свойства астатизма, то есть вывода выходных переменных на требуемые уровни, используем многомерный И-регулятор $\mathbf{W}(p) = \frac{\alpha}{p}\mathbf{B}$, где скаляр $\alpha > 0$ и матрица $\boldsymbol{B}$ подлежат определению. Учитывая, что управление в условиях значительной неопределенности требует особой осторожности, предъявим к замкнутой системе управления требование сверхустойчивости, выполнение которого обеспечивает экспоненциальное убывание нормы вектора выходных переменных $\mathbf{y}(t)$в ходе переходных процессов [3]. Для выполнения свойства сверхустойчивости необходимо и достаточно выполнение свойства диагональной доминантности матрицы $\boldsymbol{A}$, определяющей поведение замкнутой системы $\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{A}\mathbf{y}$, где $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{KB}$(без потери общности полагаем $\mathbf{y}^* = 0$). Ясно, что максимальная степень диагональной доминантности достигается при $\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1}$, когда $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ - единичная матрица. Исходя из сказанного будем формировать робастный регулятор в виде $\mathbf{W}^{(\text{роб})}(p) = \frac{\alpha}{p}\widetilde{\mathbf{K}}^{-1}$, где $\widetilde{\mathbf{K}}$– ОУ с номинальными параметрами, соответствующий центру зоны неопределенности $\boldsymbol{G}$, а $\alpha > 0$ настраиваемый параметр. При интервальной неопределенности границы области $\boldsymbol{G}$ задаются матрицами верхних $\overline{\mathbf{K}} = [\bar{k}_{ij}]$ и нижних $\underline{\mathbf{K}} = [\underline{k}_{ij}]$ значений элементов матрицы $\boldsymbol{K}$. Номинальный ОУ определяется матрицей $\widetilde{\mathbf{K}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{K}} + \overline{\mathbf{K}})$, а каждый ОУ, принадлежащий зоне неопределенности, может быть задан матрицей $\mathbf{K} = \widetilde{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\Delta} = [\tilde{k}_{ij} + \Delta_{ij}]$. Здесь элементы матрицы отклонений ОУ от номинала удовлетворяют условию $|\Delta_{ij}| \le m_{ij}$, где m_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{K}})$, определяющей размеры зоны неопределенности. Для дальнейшего анализа удобно рассматривать модифицированную зону неопределенности $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = \gamma\boldsymbol{\Delta}$, где $\gamma > 0$ так называемый радиус робастности, характеризующий запас сверхустойчивости. Необходимое и достаточное условие сверхустойчивости для системы $\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{A}\mathbf{y}$имеет вид

(3) $$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|, i = \overline{1,n}.$$

В рассматриваемом случае

(4) $$\mathbf{A} = \alpha\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} = \alpha(\widetilde{\mathbf{K}} + \widetilde{\boldsymbol{\Delta}})\widetilde{\mathbf{K}}^{-1} = \alpha(\mathbf{I} + \widetilde{\boldsymbol{\Delta}} \times \mathbf{C}),$$

где $\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{K}}^{-1}$.

С учетом (3) и (4) условия робастной сверхустойчивости замкнутой системы управления, гарантирующие сверхустойчивость для всех статических ОУ, у которых отличия от номинала $\widetilde{\mathbf{K}}$укладываются в допуски $|\widetilde{\Delta}_{ij}| \le \gamma m_{ij}$, выполняются, если

(5) $$1 + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Delta}_{ik}\, c_{ki} > \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Delta}_{ik}\, c_{kj}\right|, i = \overline{1,n}.$$

Учитывая, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Delta}_{ik}\, c_{kj}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|\widetilde{\Delta}_{ik}\right| \times \left|c_{kj}\right| \le \gamma \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times \left|c_{kj}\right|, i,j = \overline{1,n},$$

можно получить достаточные условия робастной сверхустойчивости

(6) $$\gamma < \gamma_{\max} = \frac{1}{\max\limits_{i=\overline{1,n}}\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times |c_{ki}|\}}.$$

Если $\gamma_{\max} \ge 1$, то рассматриваемый регулятор $\mathbf{W}^{(\text{роб})}(p) = \frac{\alpha}{p}\widetilde{\mathbf{K}}^{-1}$ гарантирует сверхустойчивость замкнутой системе со статическим ОУ в области неопределенности $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = \gamma\boldsymbol{\Delta}$ при любом $\alpha > 0$. Если же $\gamma_{\max} < 1$, то выполнение условий (6) таких гарантий не дает. Простые для проверки достаточные условия (6) могут занижать значение максимального радиуса робастности $\gamma_{\max}$, поэтому были получены необходимые и достаточные условия выполнения соотношений (5) для всех $\boldsymbol{K}$, принадлежащих зоне неопределенности $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = \gamma\boldsymbol{\Delta}$. Введем в рассмотрение *n* функций *n* переменных

$$\varphi_i(\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \dots \Delta_{in}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}\, c_{kj}\right| - \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}\, c_{ki}, i = \overline{1,n},$$

и поставим задачу определения максимума этих функций

(7) $$\varphi_i^{(\max)} = \max_{\Delta_{i1},\Delta_{i2},\dots\Delta_{in}}\{\varphi_i(\Delta_{i1}, \Delta_{i2}, \dots \Delta_{in}) \big| |\Delta_{ik}| \le m_{ik}\}, i,k = \overline{1,n}.$$

Можно показать, что решение задач нелинейного программирования (7) находится на границах допустимых областей, то есть $\Delta_{ik} = \pm m_{ik}$, а тогда решение каждой из *n* таких задач сводится к перебору 2^nвариантов. Решив задачи (7), можно найти предельное значение радиуса робастной сверхустойчивости по формуле

(8) $$\gamma_{\max} = \frac{1}{\max\{\varphi_1^{(\max)}, \varphi_2^{(\max)}, \dots \varphi_n^{(\max)}\}}.$$

Если $\gamma_{\max} \ge 1$, то рассматриваемый интегральный регулятор гарантирует сверхустойчивость замкнутой системе со статическим ОУ в области неопределенности $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}} = \gamma\boldsymbol{\Delta}$ при любом $\alpha > 0$. Если же $\gamma_{\max} < 1$, то условия (5) в области неопределенности $\boldsymbol{\Delta}$ не выполняются и для такого ОУ робастный регулятор следует рассчитывать другими методами [5].

2.4. Робастное управление динамическим объектом

Из общих результатов работы [6] следует, что если для статического ОУ, полученного из исходного динамического объекта рассматриваемого типа исключением динамики получен И-регулятор $\mathbf{W}(p) = \frac{\alpha}{p}\mathbf{B}$, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы, то всегда найдется такое достаточно малое $\alpha > 0$, что замкнутая таким регулятором система с исходным динамическим ОУ будет также устойчива. Пусть в результате применения соотношений (6) или (8) показано, что для регулятора $\mathbf{W}^{(\text{роб})}(p) = \frac{\alpha}{p}\widetilde{\mathbf{K}}^{-1}$применительно к области неопределенности $\boldsymbol{\Delta}$параметров матрицы $\boldsymbol{K}$ максимальный радиус робастности $\gamma_{\max} \ge 1$. Тогда этот регулятор может быть использован в качестве робастного для исходного динамического ОУ (1) при достаточно малом коэффициенте $\alpha > 0$. Значение α не сложно получить путем численного решения задачи (2). При этом потребуются дискретизация области неопределенности $\boldsymbol{G}$ и решение ряда задач одномерного поиска в рамках имитационного компьютерного моделирования работы динамической системы «объект *H* – регулятор *W*». Решение может быть улучшено при использовании ПИ-регулятора $\mathbf{W}^{(\text{роб})}(p) = (\beta + \frac{\alpha}{p})\widetilde{\mathbf{K}}^{-1}$ или ПИД-регулятора $\mathbf{W}^{(\text{роб})}(p) = (\beta + \frac{\alpha}{p} + \eta p)\widetilde{\mathbf{K}}^{-1}$. При этом необходимо будет решать ряд задач двумерного или трехмерного поиска.

3. Заключение

Применительно к многомерным линейным ОУ с перекрестными связями и запаздыванием, функционирующим в условиях параметрической неопределенности их динамических моделей, предложена декомпозиционная процедура расчета робастных настроек типовых регуляторов, базирующаяся на свойстве сверхустойчивости.

Список литературы

1. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления / 2-е изд., стер. С.Пб.: Лань, 2010. 624 с.
2. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983, 368 с.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5, С. 7-46.
4. Яковис Л.М., Степанов П.С., Стронгин П.Я. Условия робастной управляемости в статике для многосвязных объектов // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 4. С. 21-26.
5. Яковис Л.М., Степанов П.С., Стронгин П.Я. Робастные настройки типовых регуляторов методом максимальной чувствительности // Автоматизация в промышленности. 2022. № 12. С. 47-54.
6. Маркечко М.И., Рыбашов М.В. Оптимизация квазистационарного режима в линейных системах // Автоматика и телемеханика. 1987. № 12. С. 55-65.