УДК (303.732.4)

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА-ЖЕЛТОВА-КОЧИНОЙ

О.Г. Китаева
Южно-Уральский государственный университет(НИУ)
Россия, 454080, Челябинск, проспект Ленина, 76
E-mail: kitaevaog@susu.ru

Г.А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет(НИУ)
Россия, 454080, Челябинск, проспект Ленина, 76
E-mail: sviridiukga@susu.ru

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; стохастические уравнения; экспоненциальные дихотомии, задача стабилизации.

Аннотация: Рассматривается задача стабилизации решений стохастического уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной. Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной моделирует процесс фильтрации вязкой жидкости в пористой среде. Для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной рассматривается начально-краевая задача, причем начальными данными являются случайные величины. Уравнение рассматривается в виде системы уравнений, заданных на устойчивом и неустойчивом инвариантных пространствах. Задача стабилизации состоит в следующем. Требуется найти такое управляющее воздействие на систему, чтобы решения системы стали асимптотики устойчивыми. Для стохастического уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной найдена такая обратная связь, что замкнутая система стала асимптотически устойчивой.

Рассмотрим стохастический аналог уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u, \tag{1}$$

которое моделирует процесс фильтрации вязко-упругой несжимаемой в трещиновато-пористой среде. Будем рассматривать уравнение (1) с точки зрения стохастического подхода. Для этого зададим пространства

$$\mathfrak{U} = \{z \in W_2^{l+2}(-\pi,\pi) : z(-\pi) = z(\pi) = 0\},\ \mathfrak{F} = W_2^l(-\pi,\pi),$$

где $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Последовательность $\{\sin kx\}$ собственных функций оператора Лапласа Δ является базисом в гильбертовом пространстве $W_p^{l+2}(-\pi,\pi)$ и спектр $\sigma(\Delta) = -k^2$. Пусть последовательность $\{\chi_k\} \subset \mathbf{L_2}$ ($\{\zeta_k\} \subset \mathbf{L_2}$) является равномерна ограничена, последовательность $\{\lambda_k\}$ такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$. Элементами пространства $\mathbf{K}$-величин $\mathbf{U_K L}_2$ ($\mathbf{F_K L}_2$) являются векторы

$$\chi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_k \sin kx \ \left(\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \zeta_k \sin kx \right).$$

Формулами $L = (\lambda - \Delta),\ M = \alpha\Delta$ определим операторы $L,\ M : \mathbf{U_K L}_2 \to \mathbf{F_K L}_2$. Тогда стохастическое уравнение (1) можно рассматривать в виде

$$L \overset{o}{\eta} = M\eta \tag{2}$$

где $L,\ M$ – линейные и непрерывные операторы, η – стохастический $\mathbf{K}$-процесс, $\overset{o}{\eta}$ – его производная Нельсона-Гликлиха.

Через $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ обозначим *L-резольвентное множество*, а через $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ – *L-спектр оператора M*. Если оператор M (L,σ)-ограничен, т.е. его L-спектр ограничен, тогда существуют проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L d\mu \in \mathcal{L}(\mathbf{U_K L}_2),\ Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L(\mu L - M)^{-1} d\mu \in \mathcal{L}(\mathbf{F_K L}_2). \tag{3}$$

Здесь контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L(M)$.

Проекторы (3) расщепляют пространства $\mathbf{U_K L}_2 = \mathbf{U^0_K L}_2 \oplus \mathbf{U^1_K L}_2$ и $\mathbf{F_K L}_2 = \mathbf{F^0_K L}_2 \oplus \mathbf{F^1_K L}_2$, где $\mathbf{U^0_K L}_2$ $(\mathbf{U^1_K L}_2) = \ker P$ $(\mathrm{im} P)$, $\mathbf{F^0_K L}_2$ $(\mathbf{F^1_K L}_2) = \ker Q$ $(\mathrm{im} Q)$. Сужение оператора L (M) на $\mathbf{U^k_K L}_2$, $k = 0,1$, обозначим L_k (M_k). Операторы $L_k(M_k) \in \mathcal{L}(\mathbf{U^k_K L}_2, \mathbf{F^k_K L}_2)$, $k = 0,1$, существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F^0_K L}_2, \mathbf{U^0_K L}_2)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{F^1_K L}_2, \mathbf{U^1_K L}_2)$. Рассмотрим операторы $H = L_0^{-1} M_0$ и $S = L_1^{-1} M_1$. Пусть оператор M (L,p)-ограничен и $H \equiv \mathbb{O}$, $p = 0$ или $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$, тогда он называется *$(L,p)$-ограниченным* оператором.

Если выполнено условие

$$\begin{aligned} &\sigma^L(M) = \sigma^L_l(M) \oplus \sigma^L_r(M), \text{ где} \\ &\sigma^L_l(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \Re\mu < 0\} \neq \oslash, \\ &\sigma^L_r(M) = \{\mu \in \sigma^L(M) : \Re\mu > 0\} \neq \oslash, \end{aligned} \tag{4}$$

тогда существуют проекторы

$$P_{l(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{l(r)}} (\mu L - M)^{-1} L d\mu,\ Q_{l(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{l(r)}} L(\mu L - M)^{-1} d\mu,$$

где контур $\Gamma_{l(r)}$ лежит в левой (правой) полуплоскости и ограничивает область, содержащую ту часть L-спектра оператора M, которая расположена в данной полуплоскости. Заметим, что $P_{l(r)}P = PP_{l(r)} = P_{l(r)}$ и $Q_{l(r)}Q = QQ_{l(r)} = Q_{l(r)}$, причем $P_l P_r = P_r P_l = \mathbb{O}$ и $Q_l Q_r = Q_r Q_l = \mathbb{O}$. Положим $\mathbf{I}^{s(u)} = \mathrm{im} P_{l(r)}$, $\mathbf{F}^{s(u)}_{\mathbf{K}}\mathbf{L}_2 = \mathrm{im} Q_{l(r)}$, и через M_l (L_l) и M_r (L_r) обозначим сужения M (L) на $\mathbf{I}^s$ и $\mathbf{I}^u$.

Рассмотрим линейное уравнение (2) с начальным условием

$$\eta(0) = \eta_0, \tag{5}$$

где $\eta_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \varphi_k$. Пусть выполнено условие (4), тогда задачу (2), (5) будем рассматривать в виде системы

$$H \overset{o}{\eta}{}^0 = \eta^0,\ \eta^0(0) = \eta^0_0, \tag{6}$$

(7) $$L_l \overset{o}{\eta_l} = M_l\eta_l,\ \eta_l(0) = \eta_{l0},$$

(8) $$L_r \overset{o}{\eta_r} = M_r\eta_r,\ \eta_r(0) = \eta_{r0}.$$

Здесь $\eta_0^0 = (\mathbb{I} - P)\eta_0 = \sum\limits_{k=\{k:\ker L\neq\{0\}\}} \lambda_k\xi_k\varphi_k$, $\eta_{l0} = P_l\eta_0 = \sum\limits_{k=\{k:\Re\mu_k<0\}} \lambda_k\xi_k(t)\varphi_k$, $\eta_{r0} = P_r\eta_0 = \sum\limits_{k=\{k:\Re\mu_k>0\}} \lambda_k\xi_k(t)\varphi_k$. Существование решений задачи (2), (5) обсуждалось в [1]. Показано, что если $\eta_0 \in \mathbf{U}^1_\mathbf{K}\mathbf{L}_2$, то существует единственное решение задачи (2), (5). В [2] показано, что существуют голоморфные группы

$$U_l^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_l}(\mu L_l - M_l)^{-1}L_l e^{\mu t}d\mu,\ U_r^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}(\mu L_r - M_r)^{-1}L_r e^{\mu t}d\mu.$$

Решения $\eta_l = \eta_l(t) = U_l^t\eta_{l0}$ задачи (7) принадлежат устойчивому инвариантному пространству $\mathbf{I}^s$, а решения $\eta_r = \eta_r(t) = U_r^t\eta_{r0}$ задачи (8) принадлежат неустойчивому инвариантному пространству $\mathbf{I}^u$. Стохастический процесс $\eta = \eta_l + \eta_r$ является решением задачи (2), (5).

Пусть $\nu = \max\limits_{\mu\in\sigma_r^L(M)} \Re\mu + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Решение задачи (9) имеет вид $\eta_l = U_l^t\eta_{l0}$. Так как $\lim\limits_{t\to\infty}\|\eta_l(t)\|_{\mathbf{U_K L_2}} = 0$, то рассмотрим следующую задачу стабилизации. Требуется найти такую случайную величину $\chi \in \mathbf{F}^r_\mathbf{K}\mathbf{L}_2$, что решения системы

(9) $$L_l \overset{o}{\eta_l} = M_l\eta_l,\ \eta_l(0) = \eta_{l0},$$

(10) $$L_r \overset{o}{\eta_r} = M_r\eta_r + \chi,\ \eta_r(0) = \eta_{r0}$$

стабилизируются, т.е.

(11) $$\lim_{t\to\infty}\|\eta_r(t)\|_{\mathbf{U_K L_2}} = 0.$$

Для (5) найдем обратную связь вида

(12) $$\chi = B\eta_r$$

такую, чтобы замкнутая система, замкнутая обратной связью (12), была асимптотически устойчивой. Здесь B – некоторый линейный ограниченный оператор. Итак, для уравнения

(13) $$L_r \overset{o}{\eta_r} = M_r\eta_r + B\eta_r = (M_r + K)\eta_r$$

требуется найти такой оператор B, что спектр $\sigma^{L_r}(M_r + B)$ лежит в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Тогда

$$\sigma^L(M) = \sigma^L_+(M) \bigcup \sigma^L_-(M),$$

где

$$\sigma^L_+(M) = \left\{ \frac{-\alpha k^2}{\lambda + k^2} : \ -k^2 > \lambda \right\}, \ \sigma^L_-(M) = \left\{ \frac{-\alpha k^2}{\lambda + k^2} : \ -k^2 < \lambda \right\}.$$

Пространства

$$\mathbf{I}^u = \left\{ \eta \in \mathbf{U_K L}_2 : (\cdot, \sin kx) \sin kx = 0, \ -k^2 > \lambda \right\},$$

$$\mathbf{I}^s = \left\{ \eta \in \mathbf{U_K L}_2 : (\cdot, \sin kx) \sin kx = 0, -k^2 < \lambda \right\}.$$

являются неустойчивым и устойчивым инвариантными пространствами. Размерность пространства $\mathbf{I^u}$ равна $m = \max k : \{-k^2 > \lambda\}$, и $\mathrm{codim}\mathbf{I}^s = m + \dim \ker L$.

Пусть $B = \alpha(\varepsilon + m^2)$, ε можно выбрать сколь угодно малым. Тогда

$$\sigma^{L_r}(M_r + K) = \left\{ \frac{-\alpha k^2 + \alpha(\varepsilon + m^2)}{\lambda + k^2} \right\} < 0.$$

Решение задачи (13) имеет вид

$$\eta_r = \sum_{k=1}^{m} \exp\left(\frac{-\alpha k^2 + \alpha(\varepsilon + m^2)}{\lambda + k^2} t \right) \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \xi_k \sin kx, \sin kx \right) \sin kx.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20037, https://rscf.ru/project/20-11-20037/.

Список литературы

1. Свиридюк Г.А., Манакова Н.А. Динамические модели соболевского типа с условием Шоуолтера-Сидорова и аддитивными "шумами" // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1. С. 90–103.
2. Kitaeva O.G., Shafranov D.E., Sviridyuk G.A. Exponential Dichotomies in the Barenblatt-Zheltov-Kochina Model in Spaces of Differential Forms with "Noise" // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2019. Т. 2, № 12. С. 47–57.
3. Kitaeva O.G. Stabilization of the Stochastic Barenblatt-Zheltov-Cochina Equation // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2023. Vol. 10, No. 1. P. 21–29.