УДК 519.71, 519.72, 681.51

СИНТЕЗ γ–ОПТИМАЛЬНЫХ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО СОСТОЯНИЮ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ В МАШИННОЙ АРИФМЕТИКЕ С ФИКСИРОВАННОЙ ЗАПЯТОЙ

А.Ю. Кустов
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: arkadiykustov@yandex.ru

А.В. Юрченков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: alexander.yurchenkov@gmail.com

Ключевые слова: анизотропийная теория, линейные дискретные системы, субоптимальное управление, ошибки округления

Аннотация: В работе рассматривается задача синтеза γ-оптимального анизотропийного регулятора в форме обратной связи по состоянию для линейной дискретной стационарной системы при условии его реализации в машинной арифметике с фиксированной запятой. Для моделирования эффекта конечности числа знаков дробной части десятичного представления числа выбрана модель представления ошибок округления в виде независимых случайных белых шумов. Для описания качества функционирования замкнутой системы также предложена модификация анизотропийной нормы, пригодная для использования при решении задач синтеза цифровых анизотропийных регуляторов.

1. Введение

В инженерных приложениях теории автоматического управления нередко приходится иметь дело с различными возмущениями, неопределенностями, шумами, пагубно влияющими на характеристики процесса управления. В большинстве задач робастного управления выбирается класс неопределенностей системы объект+среда, и для него предлагается тот или иной метод решения соответствующей задачи управления. Предлагаемые методы решения исходят из разных соображений, и в зависимости от ситуаций более работоспособными будут одни методы или другие.

Для высокоточных систем гибридного типа, когда цифровое устройство управляет аналоговым процессом, зачастую недопустимо пренебрежение ошибками, связанными с округлением чисел при реализации закона управления. Учет эффекта округления возможен несколькими способами, один из которых заключается в описании ошибок округления посредством случайных процессов, аддитивно действующих на соответствующие величины. Для линейных систем управления выбор такого способа моделирования ошибок округления приведет к появлению в системе дополнительных шумов, подлежащих учету при оптимизации процесса управления. Решению подобных задач управления посвящено огромное число работ, отличающихся друг от друга в выборе как класса внешних возмущений, так и оптимизируемого функционала качества [1, 2].

При наличии случайных внешних возмущений, действующих на систему по аддитивному принципу, классическим к решению задач управления и оценивания считается подход, разработанный в рамках $\mathbf{H}_2$-теории и ее ответвлениях. При работе с детерминированным возмущением конечной мощности зачастую опираются на результаты, полученные в рамках $\mathbf{H}_\infty$-теории управления. Одной из теорий, обобщающих классические результаты $\mathbf{H}_2$- и $\mathbf{H}_\infty$-теорий, является анизотропийная теория управления и фильтрации. В рамках нее внешнее возмущение считается неопределенным в статистическом (за счет наличия неопределенности в характеристиках типа моментов) и теоретико-информационном (за счет энтропийного происхождения функционала, используемого для описания неопределенности в целом) смыслах и описывается ограничением на среднюю анизотропию дискретного случайного процесса [3–6].

Объектом исследования данной работы является линейная дискретная стационарная система управления со случайными внешними возмущениями. Внешние возмущения предполагаются статистически неизвестными, но удовлетворяющими ограничению на среднюю анизотропию. Решение задачи управления происходит в машинной арифметике с фиксированной запятой, т.е. все сигналы цифровой природы имеют установленное ограничение на число знаков после запятой. При данных условиях требуется синтезировать γ-оптимальный анизотропийный регулятор в форме статической обратной связи по состоянию.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_u & B_w \\ \hline I_{n_x} & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \\ w_k \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где x_k – n_x-мерный вектор состояния; u_k – n_u-мерный вектор управления; w_k – n_w-мерный вектор внешних возмущений; y_k – n_y-мерный вектор измерений ($n_y = n_x$); z_k – n_z-мерный вектор регулируемого выхода. Матрицы системы считаются известными, причем пара матриц (A, B_u) предполагается стабилизируемой. Внешнее возмущение ограничено условием $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, где средняя анизотропия $\overline{\mathbf{A}}(W)$ определяется следующим набором формул: $\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N})}{N+1}$, $W_{0:N} = (w_0^{\mathrm{T}}, \ldots, w_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}(w) = \min\limits_{\lambda>0} \mathbf{D}(f||p)$, $p(s) = (2\pi\lambda)^{-n_w/2} \exp\big(-\frac{|s|^2}{2\lambda}\big)$, $s \in \mathbb{R}^{n_w}$. Связь анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности с относительной энтропией $\mathbf{D}(f||p)$ позволяет трактовать их как меры отклонения соответствующих распределений относительно стандартного нормального распределения. Без потери общности внешнее возмущение w предполагается гауссовским. Данное предположение является откликом принципа максимума энтропии, тесно связанного с рядом результатов анизотропийной теории. Также дополнительно потребуем, что известен диапазон, в котором лежит совокупная дисперсия внешнего возмущения, т.е. известны числа $c_i \geqslant 0$, такие, что $c_1 \leqslant \mathrm{tr}(\Sigma) \leqslant c_2$, где Σ_w – ковариационная матрица стационарного случайного процесса $\{w_k\}_{k\geqslant 0}$ на установившемся (стационарном) режиме: $\Sigma_w = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{E}[w_k w_k^{\mathrm{T}}]$.

Первым требованием к искомому регулятору по умолчанию является требование устойчивости замкнутой системы. Будем использовать запись $\mathcal{K}_{stab}$ для обозначения класса стабилизирующих регуляторов. В данной работе ограничимся выбором из них регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию, т.е. регуляторов, заданных уравнением $u_k = Kx_k$, или – с учетом вида системы (1) – уравнением $u_k = Ky_k$, где матрица K удовлетворяет условию $\rho(A + B_uK) < 1$. Для учета эффектов округления, связанных с цифровой природой векторов y_k и u_k, введем квантователь Q, действующий по правилу $Q(x) = x + e_x$, где x – величина, подвергаемая округлению, а e_x – ошибка совершаемого округления, соответственно. Несмотря на существование более точных результатов [7], мы ограничимся самым простым случаем: показано [8–10], что при выполнении определенных условий элементы векторов–ошибок округления могут быть математически описаны как независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке $[-s/2; s/2]$, т.е. $e_i \overset{pdf}{\sim} U(-s/2; s/2)$, где s – цена младшего разряда, до которого производится округление. Средние значения и дисперсии ошибок округления с заданной ценой младшего разряда задаются формулами $\mathbf{E}[e_i] = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}[e_i^2] = s^2/12$. С учетом приведенных соображений система с управлением $Q(u_k) = u_k + e_{u,k}$, построенного по принципу статической обратной связи $u_k = KQ(y_k)$, где $Q(y_k) = y_k + e_{y,k}$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \hline z_k \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} A + B_uK & [B_uK \quad B_u] & B_w \\ \hline C + DK & [DK \quad D] & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_k \\ \hline e_k \\ \hline w_k \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $e_k = (e_{y,k}^{\mathrm{T}}, e_{u,k}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ – n_e-мерный вектор совокупных ошибок округления, в приведенной форме записи выступающий в качестве дополнительного входа системы; $n_e = n_y + n_u$. Подчеркнем, что предполагается выполненным требование независимости между собой во времени (по индексу k) и по образующим их элементам $e_{k,i}$ (по индексу i) случайных векторов последовательности $\{e_k\}_{k\geqslant 0}$. Заметим также, что матрица K искомого регулятора применяется при синтезе закона управления без округления ее коэффициентов.

Для количественного описания качества функционирования системы (2) могут применяться различные подходы и рассматриваться различные критерии. Индуцированный $\mathbf{H}_2$–нормой $\|G\|_2 = (\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}(\widehat{G}(j\omega)(\widehat{G}(j\omega))^*)d\omega)^{1/2}$, $\widehat{G}(j\omega) = \lim\limits_{r\to 1-0} G(re^{j\omega})$, среднеквадратичный коэффициент усиления $J_{rms}(F, W) = \|FG\|_2/\|G\|_2$, где F – передаточная функция системы, G – передаточная функция фильтра–генератора внешних возмущений, отражает способность системы уменьшать в среднеквадратичном смысле влияние внешнего возмущения на выход системы. При наложении дополнительного условия на среднюю анизотропию внешнего возмущения и при переходе к рассмотрению его наихудшего случая получим функционал качества, названный анизотропийной нормой [6]: $|\!|\!|F|\!|\!|_a = \sup\limits_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} J_{rms}(F, W)$.

Задача: найти матрицу K стабилизирующего регулятора, который минимизирует верхнюю границу среднеквадратичного коэффициента усиления замкнутой им системы от совокупно действующих на систему ошибок округления e (при фиксированной цене младшего разряда s, одинаковой для y и u) и внешних возмущений w (имеющих ограниченную известным числом $a \geqslant 0$ среднюю анизотропию и удовлетворяющих дополнительному условию $c_1 \leqslant \mathrm{tr}(\Sigma) \leqslant c_2$) к выходу z, т.е.

$$\sup_W \left\{ J_{rms}(F_{cl}, (E, W)) \;\middle|\; \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a,\ c_1 \leqslant \mathrm{tr}(\Sigma_w) \leqslant c_2 \right\} \leqslant \gamma \to \min_{K \in \mathcal{K}_{stab}}, \tag{3}$$

где в соответствии с [13] $J_{rms}(F_{cl}, (E, W)) = \sqrt{\frac{\|F_{ze}\|_2^2\sigma^2 + \|F_{zw}G\|_2^2}{n_u\sigma^2 + \|G\|_2^2}}$, $\sigma^2 = s^2/12$, а вспомогательные системы F_{ze} и F_{zw} устроены следующим образом:

$$F_{ze}: \quad \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A + B_uK & B_u \\ \hline C + DK & D \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_k \\ e_k \end{pmatrix},$$

$$F_{zw}: \quad \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A + B_uK & B_w \\ \hline C + DK & 0 \end{array}\right] \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \end{pmatrix}.$$

3. Основной результат

Опираясь на результаты работ [11–13], можно сделать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть заданы числа $a \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{N}$, $c_2 \geqslant c_1 \geqslant 0$, и известны матрицы, задающие систему* (1). *Пусть на эту систему действует внешнее возмущение с ограниченной средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ и ковариационной матрицей (установившегося режима), удовлетворяющей $c_1 \leqslant \mathrm{tr}(\Sigma) \leqslant c_2$. Пусть также закон управления $u_k = Ky_k$ реализуется в рамках машинной арифметики с фиксированной запятой с ценой младшего разряда $s = 2^{-\beta}$, определяемой числом битов β, отводимых на дробную часть округляемого числа. Тогда если существует решение задачи выпуклой оптимизации $\gamma^2 \to \min$ относительно переменных $\Phi = \Phi^{\mathrm{T}} \succ 0$, $\Psi_i = \Psi_i^{\mathrm{T}} \succ 0$, X, $\eta_i^2 > 0$, $\gamma_i^2 > 0$, $\gamma^2 > 0$ при условиях в виде системы линейных матричных неравенств (с симметричными матрицами в левых частях)*

$$\begin{bmatrix} \Phi & \star & \star & \star \\ 0 & \eta_i^2 I_{n_i} & \star & \star \\ A\Phi + B_uX & B_i & \Phi & \star \\ C\Phi + DX & D_i & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \eta_i^2 I_{n_i} - \Psi_i & \star \\ B_i & \Phi \end{bmatrix} \succ 0$$

и неравенства специального вида $(\det(\Psi_i))^{1/n_i} \geqslant e^{2a_i/n_i}(\eta_i^2 - \gamma_i^2)$, задающих в совокупности выпуклое множество ограничений, где $i = 1, 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $n_1 = n_e$, $n_2 = n_w$, $B_1 = B_u$, $B_2 = B_w$, $D_1 = D$, $D_2 = 0$, и для $j = 1, 2$ выполняется $\gamma_1^2\lambda(c_j) + \gamma_2^2(1 - \lambda(c_j)) \leqslant \gamma^2$, где $\lambda(c) = n_u\sigma^2(n_u\sigma^2 + c)^{-1}$, $\sigma^2 = s^2/12$, то закон управления $u_k = Ky_k$ с матрицей $K = X\Phi$ является стабилизирующим систему (1) *и обеспечивает выполнение условия* (3).

Доказательство теоремы несложно вывести на основе доказательств аналогичных утверждений из работ [11–13].

4. Заключение

В данной статье решена задача синтеза γ-оптимального анизотропийного регулятора в форме обратной связи по состоянию для линейной дискретной стационарной системы. При построении регулятора учтены ошибки округления, связанные с условием его реализации в машинной арифметике с фиксированной запятой. Для моделирования данного эффекта была использована математическая модель представления ошибок округления в виде независимых случайных белых шумов, оказывающих влияние на систему в виде дополнительных аддитивно-действующих возмущений и подлежащих учету при построении закона управления. Для описания качества функционирования замкнутой системы также предложена модификация анизотропийной нормы, которая учитывает описанные эффекты округления.

Список литературы

1. Liu K., Skelton R.E., and Grigoriadis K. Optimal Controllers for Finite Wordlength Implementation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. Vol. 37, No. 9, P. 1294–1304.
2. Williamson D., Skelton R.E., and Grigoriadis K. Finite Wordlength Control of Sampled Data Systems by Covariance Assignment // IFAC Proceedings Volumes. 1993. Vol. 26, No. 2(2), P. 193–196.
3. Semyonov A.V., Vladimirov I.G., and Kurdjukov A.P. Stochastic Approach to H_∞-optimization // Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control. 1994. Vol. 3, P. 2249–2250.
4. Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., and Semenov A.V. Anisotropy of Signals and Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Math. 1995. Vol. 82, No. 3, P. 386–390.
5. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., and Semyonov A.V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29, No. 1, P. 3057–3062.
6. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., and Semyonov A.V. State-space Solution to Anisotropy-based Stochastic H_∞-optimization Problem // IFAC Proceedings Volumes. 1996. Vol. 29, No. 1, P. 3816–3821.
7. Vladimirov I.G., Diamond P. A Uniform White-Noise Model for Fixed-Point Roundoff Errors in Digital Systems // Automation and Remote Control. 2002. Vol. 63, P. 753–765.
8. Косякин А.А. Статистическая теория квантования по уровню // Автоматика и телемеханика. 1961. № 22(6), С. 722–729.
9. Widrow B. Statistical Analysis of Amplitude-quantized Sampled-data Systems // Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry. 1961. Vol. 79, No. 6, P. 555–568.
10. Sripad A.B., Snyder D. A Necessary and Sufficient Condition for Quantization Errors to be Uniform and White // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1977. Vol. 25, Is. 6, P. 442–448.
11. Tchaikovsky M. Static Output Feedback Anisotropic Controller Design by LMI-based Approach: General and Special Cases // 2012 American Control Conference. 2012. P. 5208–5213.
12. Kustov A.Yu., Timin V.N. Suboptimal Anisotropy-based Control for Linear Discrete Time Varying Systems with Noncentered Disturbances // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, P. 6122–6127.
13. Kustov A.Yu., Yurchenkov A.V. Anisotropy-based Analysis Problem for Linear Discrete Time Invariant Systems with Fixed-point Arithmetic in Control Actions Space // Proceedings of the International Conference on Systems and Control (to be appeared). 2023.