УДК 519.21

О РОБАСТНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА С МАРТИНГАЛЬНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА

Е.С. Паламарчук

Центральный экономико-математический институт РАН;

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Россия, 117418, Москва, Нахимовский пр., 47; Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8

E-mail: e.palamarchuck@gmail.com

Ключевые слова: стохастический линейный регулятор, мультипликативные возмущения, неопределенность издержек, долговременное среднее.

Аннотация: Рассматривается задача стохастического линейно-квадратического регулятора при мультипликативных возмущениях в уравнении динамики состояния и целевом функционале. Определяются условия существования закона управления, оптимального по критерию долговременного среднего и его потраекторного аналога.

1. Введение

Пусть задано полное вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ и все вводимые далее случайные процессы определены на нем. Рассмотрим стандартную линейную стохастическую систему управления с аддитивным шумом:

$$dX_t = AX_t\,dt + BU_t\,dt + GdW_t\,, \qquad X_0 = x\,, \tag{1}$$

где $A, B, G \neq 0$ – известные постоянные матрицы; x – неслучайное начальное состояние; $U_t, t \geqslant 0,$ – допустимое управление; $W_t,\ \ t \geqslant 0,$ – стандартный многомерный винеровский процесс. Интегральный квадратичный целевой функционал за период $[0, T]$ имеет вид

$$J_T(U) = \int\limits_0^T (X_t'QX_t + U_t'RU_t)\,dt\,, \tag{2}$$

where $Q > 0,\ R > 0$ – симметричные положительно определенные матрицы; $\geqslant, >$ – обозначения для неотрицательной и положительной определенности матриц соответственно; $'$ – знак транспонирования.

Предположим, что в коэффициентах, относящихся к состоянию, присутствует параметрическая неопределенность. Известно, что моделирование неопределенности можно провести при помощи включения гауссовского белого шума. Тогда (1) преобразуется к уравнению, содержащему мультипликативные возмущения. Системы управления такого вида используются в различных приложениях, см. [4], [5], [7]. В данной работе предполагается, что шумовым воздействиям также подвержены и матрицы коэффициентов в целевом функционале (2), что, в частности, соответствует экономическому понятию неопределенности издержек, см. [1] и [8]. Точнее, пусть

$$A \to A + C\xi_t\,, \quad Q \to Q + C_1\xi_t\,, \tag{3}$$

ξ_t – гауссовский белый шум, C, C_1 – некоторые постоянные матрицы. Тогда, определяя $\xi_t dt = dw_t$, где w_t, $t \geqslant 0$, – скалярный винеровский процесс, не зависящий от W_t, получаем следующую систему управления

$$dX_t = AX_t\,dt + BU_t\,dt + GdW_t + CX_t dw_t\,, \qquad X_0 = x\,, \tag{4}$$

где U_t, $t \geqslant 0$, – допустимое управление, т.е. $\mathcal{F}_t = \bar{\sigma}\{W_s, w_s, s \leqslant t\}$-согласованный процесс, при котором существует решение (4) ($\bar{\sigma}(\cdot)$ – знак σ-алгебры). Множество допустимых управлений обозначим $\mathcal{U}$. Функционал потерь принимает вид

$$J_T^{(C_1)}(U) = \int\limits_0^T (X_t'QX_t + U_t'RU_t)\,dt + \int\limits_0^T X_t'C_1X_t dw_t\,. \tag{5}$$

Целью работы является исследование системы управления (4)–(5) при $T \to \infty$.

2. Основные результаты

2.1. Оптимальность в среднем

Традиционно при $T \to \infty$ ищется управление, минимизирующее долгосрочные ожидаемые потери, т.е. оптимальное в среднем на бесконечном интервале времени. Ввиду того, что $EJ_T^{(C_1)}(U) = EJ_T^{(0)}(U)$, где $J_T^{(0)}(U)$ соответствует случаю $C_1 = 0$, можно использовать критерий долговременного среднего и вводить стандартные условия существования оптимального управления U^*.

Предположение 1. *Линейная стохастическая система с матрицами* (A, B, C) *является экспоненциально стабилизируемой в среднем квадратичном.*

Экспоненциальная стабилизируемость в среднем квадратичном означает существование закона управления $U_t = KX_t$, при подстановке которого в (4) будет иметь место оценка $E\|\Phi(t,s)\|^2 \leqslant \kappa_0 \exp\{-\kappa(t-s)\}$, $s \leqslant t$, $\kappa_0, \kappa > 0$, где $\Phi(t,s)$ – соответствующая фундаментальная матрица (4), $\|\cdot\|$ – матричная евклидова норма. Известно, см. Section 4 в [3], что предположение 1 и условие $Q > 0$ влекут существование симметричной матрицы $\Pi \geqslant 0$, удовлетворяющей обобщенному алгебраическому уравнению Риккати вида

$$A'\Pi + \Pi A - \Pi BR^{-1}B'\Pi + C'\Pi C + Q = 0\,, \tag{6}$$

и при этом линейная стохастическая система с матрицами $(A - BR^{-1}B'\Pi, C)$ является экспоненциально устойчивой в среднем квадратичном.

Определим закон управления вида

$$U_t^* = -R^{-1}B'\Pi X_t^*\,, \tag{7}$$

где процесс X_t^*, $t \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению

$$dX_t^* = (A - BR^{-1}B'\Pi)X_t^*\,dt + GdW_t + CX_t^*dw_t\,, \quad X_0^* = x\,. \tag{8}$$

Доказано следующее утверждение об оптимальности в среднем.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда закон управления* U^* *вида* (7)–(8) *является решением задачи*

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(C_1)}(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,, \tag{9}$$

и при этом

$$\lim_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(C_1)}(U^*)}{T} = tr(G'\Pi G)\,,$$

где $tr(\cdot)$ *– обозначение следа матрицы, матрица* Π *удовлетворяет уравнению* (6).

2.2. Потраекторная оптимальность и робастность

Определенный выше закон управления U^* обеспечивает минимизацию долгосрочных ожидаемых потерь на единицу времени. Однако это свойство не дает информации о качестве управления на отдельно взятой траектории, т.е. при конкретной реализации неопределенности. Соответственно, возникает проблема исследования потраекторной оптимальности [2], когда критерий в задаче (9) заменяется на потраекторное эргодическое, см. (12) ниже, также называемое потраекторным средним. Сначала требуется определить условия, при которых значение этого нового критерия на управлении U^* является конечным числом (с вероятностью 1). Следствием указанных ранее соотношений оказывается свойство $E\|X_t^*\|^2 \leqslant const$, $t \geqslant 0$. Применение формулы Ито в представлении для $J_T^{(C_1)}(U^*)$ дает более строгое требование $E\|X_t^*\|^4 \leqslant const$, $t \geqslant 0$, достаточное для существования потраекторного эргодического. Выполнение данного условия обеспечивается при $E\|\Phi(t,s)\|^4 \leqslant \hat\kappa_0 \exp\{-\hat\kappa(t-s)\}$, $s \leqslant t$, $\hat\kappa_0, \hat\kappa > 0$, где $\Phi(t,s)$ – соответствующая фундаментальная матрица (8). Введем следующее предположение, гарантирующее наличие приведенной выше экспоненциальной верхней оценки, см. [6].

Предположение 2. *Пусть в условиях предположения 1 также существует симметричная матрица* $\bar\Pi > 0$, *являющаяся решением уравнения*

$$\mathcal{A}'\bar\Pi + \bar\Pi\mathcal{A} + 3C'\bar\Pi C + \bar Q = 0\,,$$

при некоторой матрице $\bar Q > 0$, *где* $\mathcal{A} = A - BR^{-1}B'\Pi$.

Тогда имеет место следующий результат.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{J_T^{(C_1)}(U^*)}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{EJ_T^{(C_1)}(U^*)}{T} = tr(G'\Pi G)\,.$$

Доказано утверждение о потраекторной оптимальности управления U^*.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 1, 2 и существует симметричная матрица $D > 0$, удовлетворяющая соотношениям*

$$-A'D - DA - DBR^{-1}B'D + Q - C'DC > 0\,, \tag{10}$$

$$C'D + DC = C_1\,. \tag{11}$$

Тогда закон управления U^* вида (7)–(8) является решением задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{J_T^{(C_1)}(U)}{T} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}\,, \quad \text{с вероятностью 1}, \tag{12}$$

и при этом

$$\lim_{T\to\infty} \frac{J_T^{(C_1)}(U^*)}{T} = tr(G'\Pi G)\,, \quad \text{почти наверное},$$

где матрица Π удовлетворяет уравнению (6).

Заметим, что при анализе требований теоремы 2 для заданных матриц C и C_1 необходимо сначала рассмотреть (11), которое является уравнением по типу Ляпунова. При этом достаточные условия существования симметричного решения $D > 0$ формулируются так: 1) симметричная матрица $C_1 < 0$, матрица C – экспоненциально устойчива или 2) симметричная матрица $C_1 > 0$, матрица $-C$ – экспоненциально устойчива. Затем найденная матрица D подставляется в неравенство (10) и проверяется его выполнение. Если же нас интересует робастность U^* при известной матрице C, то в первую очередь исследуется (10), а потом C_1 находится согласно (11). Стоит отдельно подчеркнуть, что (10) является неравенством типа Риккати нестандартного вида. Достаточные условия для существования его решения можно сформулировать на основе анализа скалярного неравенства $-2\bar{a}d - r^{-1}\bar{b}^2d^2 + q > 0$, где $\bar{a} = \|A\| + (1/2)\|C\|^2$, $\bar{b} = \|B\|$, константа $q > 0$ определяется из условия $Q > qI$, I – единичная матрица. Тогда симметричная матрица $D > 0$ со свойством $\|D\| < d^{(+)}$, где $d^{(+)} = (-\bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + r^{-1}\bar{b}^2q})r\bar{b}^{-2}$, будет удовлетворять (10), причем увеличение q способствует росту верхней границы для допустимой $\|D\|$. При этом $\|C_1\| \leqslant 2\|C\|d^{(+)}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00375, https://rscf.ru/23-11-00375/.

Список литературы

1. Barratt S., Boyd S. Stochastic control with affine dynamics and extended quadratic costs // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. Vol. AC-67, No. 1. P. 320–335.
2. Dai Pra P., Di Masi G.B., Trivellato B. Pathwise optimality in stochastic control // SIAM Journal on Control and Optimization. 2000. Vol. 39, No. 5. P. 1540–1557.
3. Dragan V., Morozan T., Stoica A.M. Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems. New York: Springer, 2006. 312 p.
4. Dong L., Wei X., Hu X., Zhang H., Han J. Disturbance observer-based elegant anti-disturbance saturation control for a class of stochastic systems // International Journal of Control. 2020. Vol. 93, No. 12. P. 2859–2871.
5. Gattami A. Optimal Network Control With stochastic link variations and indefinite quadratic constraints // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2015. Vol. NS-4, No. 2. P. 259–266.

6. Sasagawa T., Willems J.L. Some results on p-th mean stability of linear systems with multiplicative noise // IFAC Proceedings Volumes. 1990. Vol. 23, No. 8. P. 7–12.
7. Sotero R.C. Shmuel A. Energy-based stochastic control of neural mass models suggests time-varying effective connectivity in the resting state // Journal of computational neuroscience. 2021. Vol. 31, No. 3. P. 563–576.
8. Tumusiime E., Wade B.B., Mosali J., Johnson J., Locke J., Biermacher J.T. Determining optimal levels of nitrogen fertilizer using random parameter models // Journal of Agricultural and Applied Economics. 2011. Vol. 43, No. 4. P. 541–552.