УДК 621

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ БЕЙЕСОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННЫЙ НА ВЕЙВЛЕТ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГАУССОВСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

И.Н. Синицын
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Россия, 119333, Москва, Вавилова, 44, кор. 2
E-mail: sinitsin@dol.ru

В.И. Синицын
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Россия, 119333, Москва, Вавилова, 44, кор. 2
E-mail: vsinitsin@ipiran.ru

Э.Р. Корепанов
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Россия, 119333, Москва, Вавилова, 44, кор. 2
E-mail: ekorepanov@ipiran.ru

Т.Д. Конашенкова
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
Россия, 119333, Москва, Вавилова, 44, кор. 2
E-mail: tkonashenkova64@mail.ru

Ключевые слова: задача оптимизации, вейвлет каноническое представление, интегральное каноническое представление, каноническое разложение, гауссовский стохастический процесс, функциональный бейесов критерий.

Аннотация: Доклад посвящен описанию применения метода вейвлет канонических представлений нестационарного стохастического процесса (СтП) для решения задач синтеза стохастических систем (СтС). Дан способ приведения интегрального канонического представления СтП к соответствующему вейвлет каноническому разложению (ВЛКР). Для нестационарной нелинейной СтС, описываемой уравнениями В.С. Пугачева с аддитивными гауссовскими случайными помехами, разработан общий метод построения оптимальной по функциональному бейесову критерию оценки выходного сигнала методом ВЛКР. Метод обеспечивает высокую точность вычисления вероятностных характеристик СтП при небольшом количестве членов ВЛКР для сложных линейных и нелинейных систем.

1. Введение

В настоящее время для анализа и обработки нестационарных стохастических процессов (СтП) методами канонических представлений (канонических разложений

(КР) и интегральных канонических представлений (ИКП)) [1, 2] широко применяют вейвлеты. В [3] описан метод, позволяющий построить вейвлет каноническое разложение (ВЛКР) СтП на основе ортонормированного базиса вейвлетов с компактными носителями, в том числе, базиса Хаара. Вычислительные эксперименты показали высокую точность вычисления вероятностных характеристик СтП уже при минимальном количестве членов ВЛКР. Метод можно применять для решения различных задач анализа и синтеза стохастических систем. Для моделирования СтП применяется также ИКП. В [1, 2] описан простейший способ построения ИКП путем замены его соответствующим каноническим разложением. В [4, 5] предложено решение задачи синтеза оптимальной по бейесову критерию (БК) линейной и нелинейной нестационарной СтС методом ВЛКР, рассмотрены различные виды БК и особые случаи задания СтС. В [6] полученные результаты были обобщены на случай функционального БК (ФБК) для решения задачи синтеза оптимальной нестационарной, в общем случае нелинейной, одномерной СтС. Дано решение задачи синтеза оптимальной по ФБК нестационарной нелинейной многомерной СтС методом ВЛКР. Система описывается уравнениями В.С. Пугачева с аддитивными нормально распределенными (гауссовскими) помехами. Случайные помехи из состава входного и выходного сигналов системы не зависят от случайных параметров СтС. Функция потерь задается линейным функционалом. Оптимальная оценка выходного СтП системы находится из условия минимума условного математического ожидания функции потерь относительно наблюдаемого входного СтП системы. Разработанный метод позволяет моделировать требуемый выходной сигнал системы и его оценку.

2. Приведение ИКП к КР

Согласно [1, 2] в силу прямой теоремы Пугачева: под ИКП скалярного стохастического процесса $X(t)$ с математическим ожиданием $m^X(t)$ и ковариационной функцией $K^X(t_1,t_2)$ в заданном интервале T изменения аргумента t понимают представление вида $X(t) = m^X(t) + \int_\Lambda V(\lambda)x(t,\lambda)d\lambda$, где $V(\lambda)$ – скалярный гауссовский белый шум интенсивности $G(\lambda)$ в области Λ, $x(t,\lambda)$ – координатная функция. Интегральному каноническому представлению СтП $X(t)$ соответствует интегральное представление ковариационной функции $K^X(t_1,t_2) = \int_\Lambda G(\lambda)x(t_1,\lambda)x(t_2,\lambda)d\lambda$ $(t_1,t_2 \in T)$. Проведем в ИКП СтП $X(t)$ дискретизацию параметра $\lambda \in \Lambda = [\lambda_0, \lambda_L]$. Пусть $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_L$, где$\lambda_\nu = \lambda_0 + \nu \cdot \Delta\, \lambda$,$\Delta\, \lambda = \frac{\lambda_L - \lambda_0}{L}, \nu = \overline{1,L}$. Рассмотрим функции в точках коллокации $\lambda_\nu^* = \lambda_0 + \nu\frac{\Delta\lambda}{2}$. Тогда $V(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{L} V(\lambda_\nu^*)\,\delta(\lambda - \lambda_\nu^*)$,$G(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{L} G(\lambda_\nu^*)\,\delta(\lambda - \lambda_\nu^*)$,$x(t,\lambda) = \sum_{\nu=1}^{L} x(t,\lambda_\nu^*)\,\delta(\lambda - \lambda_\nu^*)$. Введем обозначения: $V(\lambda_\nu^*) = V_\nu, G(\lambda_\nu^*) = G_\nu, x(t,\lambda_\nu^*) = x_\nu(t)$. В результате задача построения ИКП СтП $X(t)$ сводится к задаче построения ВЛКР вида $X(t) = m_X(t) + \sum_\nu^L V_\nu x_\nu(t)$, где V_ν – некоррелированные случайные величины (СВ) с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями G_ν, $x_\nu(t)$ – координатные функции, $K_X(t_1,t_2) = \sum_{\nu=1}^{L} G_\nu x_\nu(t_1)\,x_\nu(t_2)$.

Аналогично ИКП векторного СтП сводится к построению соответствующего векторного ВЛКР. Пользуясь обратной теоремой Пугачева, заключаем, что из ИКП ковариационной функции следует ИКП процесса, а также соответствующие их канонические разложения.

3. Метод функциональной бейесовой оптимизации

На вход системы поступает n_Z-мерный действительный СтП $Z(t) = \Phi(t, U) + X(t)$, наблюдаемый в течение промежутка времени T. На выходе СтС требуется получить n_W-мерный действительный СтП $W(s) = \Psi(s, U) + Y(s)\ (s \in S)$ Здесь $\Phi(t, U)$ и $\Psi(s, U)$ – известные, в общем случае, нелинейные функции времени $t \in T$ или $s \in S$ и n_U-мерной случайной величины (СВ) U с заданной плотностью вероятности $f(u)$. Случайные помехи $X(t)$и $Y(s)$ имеют нулевые математические ожидания и не зависят от СВ U. Рассмотрим случай, когда случайные помехи $X(t)$и $Y(s)$ зависимы. Ковариационная матрица $K^X(t_1, t_2) = \left\| K^X_{i_1 i_2}(t_1, t_2) \right\|_{i_1, i_2 = 1}^{n_z}$ помехи $X(t)$ известна и ее элементы $K^X_{i_1 i_2}(t_1, t_2)$ принадлежат пространству $L^2(T \times T)$. Совместная ковариационная матрица $K^{XY}(t, s) = \left\| K^{XY}_{i_1 i_2}(t, s) \right\|_{i_1, i_2 = 1}^{n_z, n_w}$ помех $X(t)$ и $Y(s)$ известна и $K^{XY}_{i_1 i_2}(t, s) \in L^2(T \times S)$. Функции $\Phi_i(t, u)\ (i = 1,2, \dots, n_z)$ принадлежат пространству $L^2(T)$ относительно переменной t, считая переменную u параметром.

Требуется найти оптимальную СтС с оператором A_t, выходной n_W-мерный СтП которой $W^*(s) = A_t Z$ обеспечивал бы минимум математического ожидания функции потерь: $M[l(W, W^*)] = \min$. ФБК задается функцией потерь $l(W, W^*)$ в виде линейного функционала F_s от функции $\sigma(s, W, W^*)$ переменной s: $l(W, W^*) = F_s \sigma(s, W, W^*)$. Функция $\sigma(s, W, W^*)$ в общем случае может зависеть от сигнала $W(s)$, его оценки $W^*(s)$ и их производных любых порядков. Для сокращения обозначений не указываем производные функций W и W^* в числе аргументов функции σ.

В [1] показано, что для решения этой задачи достаточно найти такой оператор, который обеспечивает минимум условного математического ожидания функции потерь в момент времени s для каждой реализации $z(t)$ СтП $Z(t)$, наблюдаемого на промежутке времени T: $M[l(W, W^*)|Z] = \min$. Эту величину называют условным риском $\rho(Z, W^*) = M[l(W, W^*)|Z]$. Так как линейный функционал и операцию математического ожидания можно менять местами, то для условного риска справедлива формула: $\rho(Z, W^*) = F_s M[\sigma(s, W, W^*)|Z]$. Для нахождения условного риска надо определить условную плотность $f_W(w|z)$ требуемого выходного СтП W, или СВ U и случайной помехи Y, относительно наблюдаемого СтП Z. Качество оценки W^* будем определять для каждой данной реализации СтП Z соответствующим значением условного риска $\rho(Z, W^*)$.

Для ИКП векторных помех $X(t)$и $Y(s)$, приведенных к соответствующим КР, представим решение задачи, состоящее из 4-х шагов.

Шаг 1. *Построение ВЛКР векторных помех $X(t)$ и $Y(s)$*. ВЛКР векторной помехи $X(t) = \|X_\theta(t)\|_{\theta=1}^{n_z}$ имеет вид: $X(t) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^x\, x_\nu(t), X_\theta(t) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^x\, x_{\nu\theta}(t)\ (\theta = 1,2, \dots, n_z)$, где $V_\nu^x\ (\nu = 1,2, \dots, L)$ – независимые скалярные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями D_ν^x , $x_{\nu\theta}(t)$ – координатные функции. ВЛКР помехи $Y(s) = \|Y_\theta(s)\|_{\theta=1}^{n_w}$ построим так, чтобы оно содержало только СВ $V_\nu^x\ (\nu = 1,2, \dots, L)$ из ВЛКР $X(t)$: $Y(s) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^x\, y_\nu(s), Y_\theta(s) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^x\, y_{\nu\theta}(s)\ (\theta = 1,2, \dots, n_w)$, $y_{\nu\theta}(t)$ – координатные функции. Алгоритм построения ВЛКР векторного СтП подробно изложен в [4].

Шаг 2. *Представление входного СтП $Z(t)$ в виде совокупности СВ*. СтП $Z(t) = \|Z_\theta(t)\|_{\theta=1}^{n_z}$ представим в виде: $Z(t) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^Z\, x_\nu(t), Z_\theta(t) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^Z\, x_{\nu\theta}(t)\ (\theta = 1,2, \dots, n_z)$, где СВ $V_\nu^Z = \alpha_\nu(U) + V_\nu^x$. Случайные функции $\alpha_\nu(U)$ выражаются через коэффициенты ВЛР функций $\Phi_i(t, u)$ относительно t, считая u параметром, по выбранному вейвлет базису при построения ВЛКР случайной помехи $X(t)$. Выразив СВ V_ν^x через СВ V_ν^Z и $\alpha_\nu(U)$, получим следующие представления случайной помехи

$Y(s) = \sum_{\nu=1}^{L}(V_\nu^Z - \alpha_\nu(U))y_\nu(s)$ и выходного СтП $W(s) = \Psi(t,U) + \sum_{\nu=1}^{L}(V_\nu^Z - \alpha_\nu(U))\, y_\nu\,(s)$.

Шаг 3. *Нахождение условной плотности* $f_W(w|z)$. Условная плотность $f_W(w|z)$ тождественно совпадает с условной плотностью СВ *U* относительно совокупности СВ V_ν^Zи определяется после наблюдения СтП $Z(t)$ на промежутке времени *T* формулой [1]:

$$f_W(w|z) = f_1(u|v_1^Z, v_2^Z, \ldots, v_L^Z) = \chi(z)f(u)\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{L}\frac{v_\nu^Z\alpha_\nu(u)}{D_\nu^x} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{L}\frac{\alpha_\nu^2(u)}{D_\nu^x}\right\},$$

где $\chi(z) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{L}\frac{v_\nu^Z\alpha_\nu(u)}{D_\nu^x} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{L}\frac{\alpha_\nu^2(u)}{D_\nu^x}\right\}du\right]^{-1}$, $v_1^z, v_2^z, \ldots, v_L^z$ – реализации СВ $V_1^z, V_2^z, \ldots, V_L^z$.

Шаг 4. *Определение вида оператора оптимальной системы.* Зная плотность $f_W(w|z)$, можно вычислить условный риск:

$$\rho(Z, W^*) = F_s\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(s, \Psi(t,u) + \sum_{\nu=1}^{L}(v_\nu^Z - \alpha_\nu(u))\, y_\nu\,(s), W^*)f_W(w|z)\,du\right].$$

Функционал F_s следует рассмотреть как функцию величины $\mathrm{P} = W^*$ при фиксированных значениях параметров v_ν^Z и времени *s*. Значение параметра $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0(s, v_1^z, v_2^z, \ldots, v_L^z)$, при котором функционал F_s достигает наименьшего значения, определяет оптимальный оператор по ФБК. Заменяя в $\mathrm{P}_0(s, v_1^z, v_2^z, \ldots, v_L^z)$ переменные $v_1^z, v_2^z, \ldots, v_L^z$ соответственно СВ $V_1^z, V_2^z, \ldots, V_L^z$, получаем вид оператора ФБК оптимальной системы: $W^* = AZ = \mathrm{P}_0(s, V_1^z, V_2^z, \ldots, V_L^z)$.

4. Заключение

В докладе описано общее решение задачи синтеза оптимальной по ФБК нелинейной нестационарной СтС, описываемой уравнениями В.С. Пугачева с аддитивными нормально распределенными помехами, методом ВЛКР. При этом все искомые параметры выражены аналитически через коэффициенты ВЛР заданных детерминированных квадратично интегрируемых функций по выбранному ортонормированному базису вейвлетов с компактными носителями, в частности, вейвлетов Хаара.

Метод функциональной бейесовой оптимизации на основе вейвлет канонических представлениях гауссовских СтП можно применять для моделирования, анализа и синтеза линейных и нелинейных информационно-управляющих систем высокой доступности, функционирующих в условиях сложных импульсных воздействий [2-7].

Список литературы

1. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Изд. 3-е. М.: Физматгиз, 1962.
2. Синицын И.Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применения. Изд. 2-е. М.: ТОРУС ПРЕСС. 2023.
3. Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (V) // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 1. С. 59-70.
4. Sinitsyn I., Sinitsyn V., Korepanov E., Konashenkova T. Synthesis of Nonlinear Nonstationary Stochastic Systems by Wavelet Canonical Expansions // Mathematics. 2023. Vol. 11, No. 9. 2059. https://doi.org/10.3390/math11092059.
5. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности (XVIII) // Системы высокой доступности. 2023. Т. 19, № 3. С. 18-34.
6. Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д. Синтез оптимальных по функциональных Бейесовым критериям стохастических систем методом вейвлет канонических разложени // Системы высокой доступности. 2023. Т. 19, № 4. С. 37-50.

7. Синицын И.Н., Шаламов А.С. Лекции по теории систем интегрированной логистической поддержки. Изд. 2-е. М.: ТОРУС ПРЕСС. 2019.