

# ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

**А.Н. Жирабок**

*Дальневосточный федеральный университет*  
Россия, 690922, Владивосток, п. Аякс, 10  
E-mail: zhirabok@mail.ru

**А.В. Зуев**

*Институт проблем морских технологий ДВО РАН*  
Россия, 690990, Владивосток, ул. Суханова, 8  
E-mail: alvzuev@yandex.ru

**А.А. Проценко**

*Институт проблем морских технологий ДВО РАН*  
Россия, 690990, Владивосток, ул. Суханова, 8  
E-mail: pro293133@gmail.com

**Ключевые слова:** линейные системы, непрерывные модели, интервальные наблюдатели, внешние возмущения, шумы измерений.

**Аннотация:** Рассматривается задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными динамическими моделями с неопределенностями. Приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель минимальной размерности. Приводятся результаты сравнения интервальных наблюдателей с методами на основе наблюдателей, работающих в скользящем режиме, и на основе предикторов/корректоров, использующих зонотопы.

## 1. Введение

Проблема оценки вектора состояния системы возникает во многих областях науки и техники. Наиболее известные методы ее решения для линейных стационарных систем основываются на наблюдателях Люенбергера и фильтрах Калмана. Одна из трудностей здесь состоит в необходимости учета неопределенностей, что в значительной степени решается использованием интервальных наблюдателей.

Задача построения интервальных наблюдателей активно исследуется последние годы [1-5]. В этих работах, как правило, определяется оценка множества допустимых значений всего вектора состояния, в то время как для приложений может потребоваться оценка только для заданной линейной функции вектора состояния. Соответствующий интервальный наблюдатель может оказаться проще наблюдателя полной размерности, а класс систем, для которых такой наблюдатель может быть построен, расширится.

В настоящей работе для систем, описываемых линейными моделями, подверженных внешним возмущениям и шумам измерений, решается задача построения интервальных наблюдателей минимальной размерности, что кроме уменьшения сложности наблюдателя позволяет сократить ширину интервала.

## 2. Основные модели

Рассмотрим систему, описанную линейной моделью

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) + L\rho(t), y(t) = Hx(t) + v(t),$$

где  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  и  $y(t) \in R^l$  – векторы состояния, управления и выхода;  $F, G, H, L, C$  и  $D$  – постоянные матрицы соответствующих размеров;  $\rho(t) \in R^q$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения,  $\underline{\rho} \leq \rho(t) \leq \bar{\rho}$  для всех  $t \geq 0$ ;  $v(t) \in R^l$  – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая шумы измерений,  $\underline{v} \leq v(t) \leq \bar{v}$  для всех  $t \geq 0$ .

Требуется построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, формирующий нижнюю  $\underline{z}(t)$  и верхнюю  $\bar{z}(t)$  границы известной линейной функции вектора состояния  $x(t)$ , заданной матрицей  $M$  в виде  $z(t) = Mx(t)$ ,  $z(t) \in R^s$ , для которых справедливо неравенство  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  при всех  $t \geq 0$ . Как и в [1], для векторов  $x^{(1)}, x^{(2)}$  отношение  $x^{(1)} \leq x^{(2)}$  понимается поэлементно.

В основе решения задачи лежит редуцированная модель системы (1) минимальной размерности, нечувствительная к возмущениям и оценивающая переменную  $z(t)$ , которая описывается уравнением

$$(2) \quad \dot{x}_*(t) = F_*x_*(t) + J_*Hx(t) + G_*u(t), z(t) = H_zx_*(t) + Qy(t),$$

$x_*(t) \in R^k$ ,  $k < n$  – размерность модели,  $F_*, J_*, G_*, H_*, L_*, H_z, Q$  – матрицы. Предполагается, что существует матрица  $\Phi$  такая, что  $x_*(t) = \Phi x(t)$  для всех  $t \geq 0$ . Матрицы, описывающие модель, удовлетворяют уравнениям [6]

$$(3) \quad \Phi F = F_*\Phi + J_*H, G_* = \Phi G, M = (H_z \quad Q)(\Phi^T \quad H^T)^T.$$

Матрица  $F_*$  задается в диагональной жордановой форме

$$F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

с отрицательными собственными числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . С точки зрения решаемой задачи такая форма является идеальной, так как матрица  $F_*$  устойчива и метцлерова [1], что необходимо для построения интервального наблюдателя. Тогда первое уравнение в (3) может быть представлено в виде  $k$  независимых уравнений:

$$(4) \quad \Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H, i = \overline{1, k}.$$

Требование  $\Phi L = 0$  – нечувствительность к возмущениям – учитывается следующим образом [6]. Введем матрицу  $L_0$  максимального ранга, такую, что  $L_0 L = 0$ , тогда  $\Phi = N L_0$  для некоторой матрицы  $N$ . В результате уравнение (4) принимает вид

$$(7) \quad (N_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} L_0(F - \lambda_i I_n) \\ H \end{pmatrix} = 0, i = \overline{1, k},$$

где  $\Phi_i, J_{*i}$  и  $N_i - i$  – строки матриц  $\Phi, J_*$  и  $N, I_n$  – единичная матрица.

Для построения модели выбирается минимальное число конкретных значений  $\lambda_i < 0$  таких, что определяемые из уравнения (7) строки  $\Phi_i = N_i L_0$  матрицы  $\Phi$  удовлетворяют последнему соотношению в условиях (3); далее из (3) определяются матрицы  $H_z, Q$  и  $G_*$ .

### 3. Основной результат

В [1, 2] и аналогичных работах, формирующих интервальную оценку множества допустимых значений вектора состояния, наблюдатель строится на основе исходной системы, в результате чего на оценку влияют как шумы измерений, так и внешние возмущения. В работе предлагается искать оценку на основе редуцированной модели

(2) системы (1), рассмотренной выше, что в ряде случаев дает возможность избежать влияния внешних возмущений и, как результат, повысить точность оценивания.

Вначале интервально оцениваются те компоненты вектора состояния, которые связаны с измеряемым вектором выхода. Для этого, не уменьшая степени общности, примем, что матрица  $H$  имеет максимальный ранг и

$$H = (H_0 0), y(t) = H_0 x^{(1)}(t) + v(t), x(t) = (x^{(1)T}(t) x^{(2)T}(t))^T,$$

$H_0$  – невырожденная матрица. Определим

$$(8) \quad \underline{y}(t) = y(t) - \bar{v}, \bar{y}(t) = y(t) - \underline{v}, \underline{x}^{(1)}(t) = H_0^{-1} \underline{y}(t), \bar{x}^{(1)}(t) = H_0^{-1} \bar{y}(t).$$

Тогда

$$\underline{e}^{(1)}(t) = x^{(1)}(t) - \underline{x}^{(1)}(t) = H_0^{-1} (y(t) - v(t)) - H_0^{-1} \underline{y}(t) = H_0^{-1} (\bar{v} - v(t)),$$

$$\bar{e}^{(1)}(t) = \bar{x}^{(1)}(t) - x^{(1)}(t) = H_0^{-1} \bar{y}(t) - H_0^{-1} (y(t) - v(t)) = H_0^{-1} (v(t) - \underline{v}).$$

Полагая, что  $H_0^{-1} \geq 0$ , из условия  $\underline{v} \leq v(t) \leq \bar{v}$  получаем  $\underline{e}^{(1)}(t) \geq 0$  и  $\bar{e}^{(1)}(t) \geq 0$ , откуда следует  $\underline{x}^{(1)}(t) \leq x^{(1)}(t) \leq \bar{x}^{(1)}(t)$ .

Таким образом, переменная  $x^{(1)}(t)$  при условии  $H_0^{-1} \geq 0$  оценивается на основе (8), при этом возмущение  $\rho(t)$  на эту оценку влияния не оказывает. Условие  $H_0^{-1} \geq 0$  с очевидностью выполняется в практически важных случаях, когда компоненты вектора  $x^{(1)}(t)$  измеряются отдельными датчиками и  $H_0 = H_0^{-1} = I_l$ .

Переменную  $x^{(2)}(t)$  предлагается оценить интервально на основе модели (2). Полагаем  $z(t) = x^{(2)}(t) = Mx(t)$  для матрицы  $M$  такой, что  $\text{rank}(M^T H_0^T) = n$ , и построим модель (2), нечувствительную к возмущению  $\rho(t)$ , на основе которой по аналогии с [1] конструируется искомый интервальный наблюдатель:

$$\dot{\underline{x}}_*(t) = F_* \underline{x}_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + J_*^+ \underline{v} - J_*^- \bar{v},$$

$$(9) \quad \dot{\bar{x}}_*(t) = F_* \bar{x}_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + J_*^+ \bar{v} - J_*^- \underline{v},$$

$$\underline{z}(t) = H_z^+ \underline{x}_*(t) - H_z^- \bar{x}_* + Qy(t), \quad \bar{z}(t) = H_z^+ \bar{x}_*(t) - H_z^- \underline{x}_* + Qy(t),$$

где  $A^+ = \max\{0, A\}$ ,  $A^- = A^+ - A$  для произвольной матрицы  $A$ ; нетрудно видеть, что  $A^+ \geq 0$  и  $A^- \geq 0$ .

**Теорема.** Если  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , то для интервального наблюдателя (9) выполняется  $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$  и  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  при всех  $t \geq 0$ .

**Доказательство теоремы.** Основано на анализе ошибок оценивания  $\underline{e}_*(t) = x_*(t) - \underline{x}_*(t)$ ,  $\bar{e}_*(t) = \bar{x}_*(t) - x_*(t)$ ,  $\underline{e}_z(t) = z(t) - \underline{z}(t)$ ,  $\bar{e}_z(t) = \bar{z}(t) - z(t)$  по аналогии с [1] и доказательстве того, что все они неотрицательны.

Таким образом, переменная  $x^{(2)}(t) = z(t)$  оценивается интервальным наблюдателем (9), при этом возмущение  $\rho(t)$  на эту оценку влияния не оказывает.

Если модель, не чувствительная к возмущениям, не существует, можно построить модель, минимально чувствительную к ним, соответствующий подход описан в [7]. В этом случае в уравнения (9) для переменной  $\dot{\underline{x}}_*(t)$  добавляется слагаемое  $L_*^+ \underline{\rho} - L_*^- \bar{\rho}$ , для  $\dot{\bar{x}}_* - L_*^+ \bar{\rho} - L_*^- \underline{\rho}$ . Интервал  $[\underline{z}(t), \bar{z}(t)]$  несколько расширяется, но так как влияние возмущений минимизировано, он будет уже, чем для наблюдателя полной размерности.

## 4. Пример

Рассмотрим модель электропривода:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= k_1 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= k_2 x_2(t) + k_3 x_3(t) + \rho(t), \\ \dot{x}_3(t) &= k_4 x_2(t) + k_5 x_3(t) + k_6 u(t), \\ y_1(t) &= x_1(t) + v_1(t), y_2(t) = x_3(t) + v_2(t),\end{aligned}$$

где  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$  – это скорость и угол вращения вала двигателя и ток якоря соответственно; коэффициенты  $k_1 - k_6$  представляют параметры электропривода; возмущение  $\rho(t)$  вызвано наличием внешнего нагрузочного момента,  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  – погрешности датчиков и шумы измерений. Модель описывается матрицами

$$F = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_6 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Построим интервальный наблюдатель, оценивающий  $x_2(t)$ , приняв  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Уравнение (7) при  $\lambda = -1$  дает  $\Phi = \begin{pmatrix} -(k_2 + 1)/k_1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $J_* = \begin{pmatrix} -(k_2 + 1)/k_1 & k_3 \end{pmatrix}$ , откуда  $G_* = 0$ ,  $L_* = 1$ ,  $H_z = 1$  и  $Q = \begin{pmatrix} (k_2 + 1)/k_1 & 0 \end{pmatrix}$ . Модель (2) принимает вид

$$(10) \quad \begin{aligned}\dot{x}_*(t) &= -x_*(t) - (k_2 + 1)y_1(t)/k_1 + k_3 y_2(t) + \rho(t), \\ z(t) &= x_*(t) + (k_2 + 1)y_1(t)/k_1.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что  $J_*^+ = \begin{pmatrix} 0 & k_3 \end{pmatrix}$ ,  $J_*^- = \begin{pmatrix} (k_2 + 1)/k_1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $L_*^+ = H_z^+ = 1$ ,  $L_*^- = H_z^- = 0$ . Интервальный наблюдатель, оценивающий  $z(t) = x_2(t)$ , описывается уравнениями

$$(11) \quad \begin{aligned}\dot{\underline{x}}_*(t) &= -\underline{x}_*(t) - (k_2 + 1)y_1(t)/k_1 + k_3 y_2(t) - (k_2 + 1)/k_1 \bar{v}_1 + k_3 \bar{v}_2 - \bar{\rho}, \\ \dot{\bar{x}}_*(t) &= -\bar{x}_*(t) - (k_2 + 1)y_1(t)/k_1 + k_3 y_2(t) - (k_2 + 1)/k_1 v_1 + k_3 \bar{v}_2 - \underline{\rho}, \\ \underline{z}(t) &= \bar{x}_*(t) + (k_2 + 1)y_1(t)/k_1, \quad \bar{z}(t) = \underline{x}_*(t) + (k_2 + 1)y_1(t)/k_1.\end{aligned}$$

Переменные  $x_1(t)$  и  $x_3(t)$  могут быть оценены согласно формулам измерений:

$$\underline{x}_1(t) = y_1(t) - \bar{v}_1, \underline{x}_3(t) = y_2(t) - \bar{v}_2, \bar{x}_1(t) = y_1(t) + v_1, \bar{x}_3(t) = y_2(t) + v_2.$$

Для сравнения рассмотрим скользящий наблюдатель [6], оценивающий  $x_2(t)$ , он строится на основе модели, которую удастся сделать независимой от возмущения  $\rho(t)$ :

$$(12) \quad \dot{x}_*(t) = -\hat{x}_*(t) + y_1(t) + k_1 x_2(t), \hat{x}_*$$

где  $w(t) = \text{sign}(e(t))$ ,  $e(t) = y_*(t) - y_1(t)$ ,  $g > 0$ ,  $\hat{x}_2(t) = (g/k_1) \text{sign}(e(t)/|e(t)| + \varepsilon)$ .

При моделировании внешнее возмущение задавалось в виде дискретного (на частоте дискретизации) белого шума, равномерно распределенного на интервале  $(-0,4; 0,4)$ , аналогично для шумов измерений, равномерно распределенных на интервале  $(-0,1; 0,1)$ . На рис. 1 показаны результаты моделирования наблюдателя (11), сплошная линия – переменная  $x_2(t)$  в окружении верхней и нижней границ; на рис. 2 – аналогичные результаты для наблюдателя (12). Видно, что погрешность оценивания наблюдателем

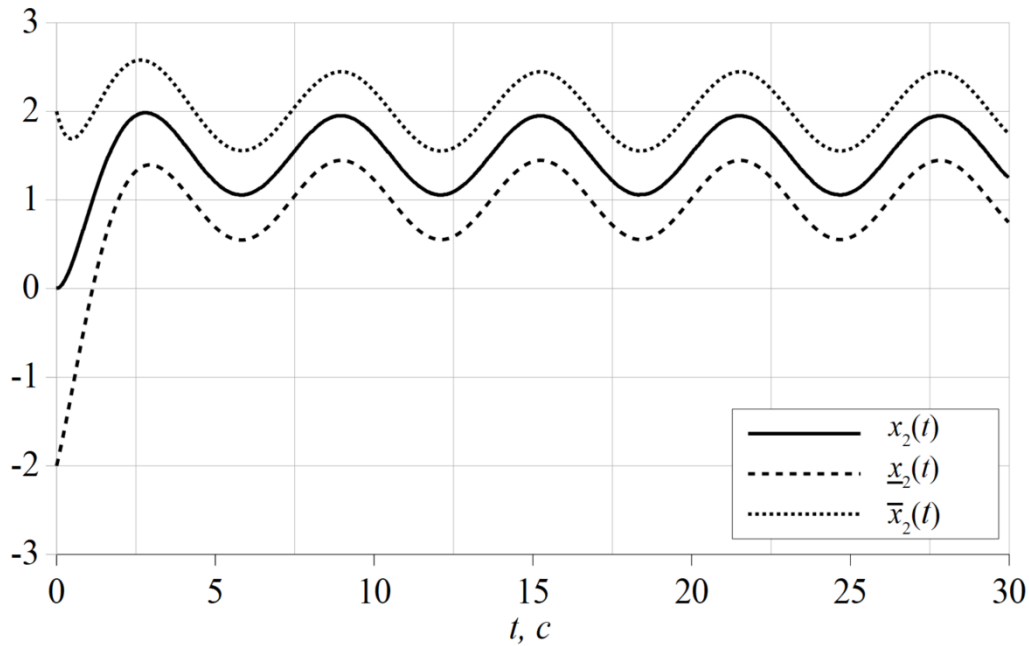


Рис. 1. Результаты моделирования интервального наблюдателя.

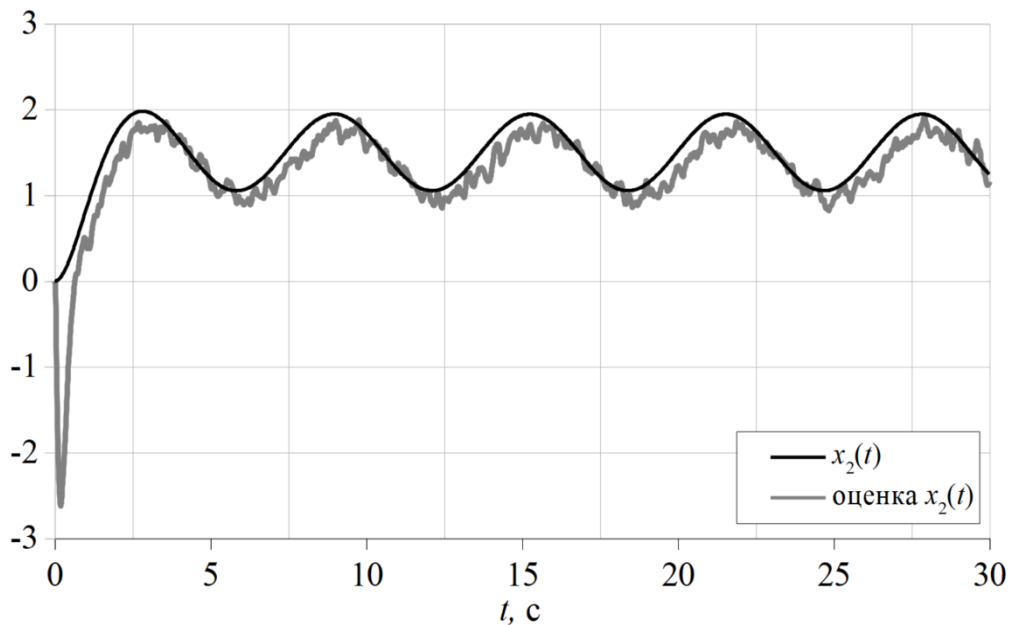


Рис. 2. Результаты моделирования скользящего наблюдателя.

(12) меньше, чем диапазон, определяемый границами  $\underline{x}_*(t)$  и  $\bar{x}_*(t)$  в интервальном наблюдателе (11), однако середина интервала  $0,5(\underline{x}_*(t) + \bar{x}_*(t))$  после окончания переходного процесса дает лучшее приближение к истинному значению этой переменной. Последнее связано с тем, что в описание наблюдателя (11) границы возмущения  $\underline{\rho}$  и  $\bar{\rho}$  при принятых в примере их значениях  $(-0,4$  и  $0,4)$  входят симметричным образом, и поэтому середина интервала практически совпадает с истинным значением переменной  $x_2(t)$ .

## 5. Заключение

Рассмотрена задача построения интервальных наблюдателей в системах, описываемых линейными моделями, с неопределенностями в виде возмущений и шумов измерений, которые позволяют оценивать множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы.

Сравнивая полученные оценки с оценками, которые строятся в [1] и аналогичных работах на основе модели полной размерности, можно сделать вывод о том, что предложенный подход дает более простой наблюдатель и интервалы меньших размеров, поскольку, в частности, не все они содержат возмущение  $\rho(t)$ . Отметим также, что кроме соответствующего интервала интервальный наблюдатель может быть использован и для точечного оценивания компонент вектора состояния в виде среднего значения на интервале.

Одна из трудностей в задаче оценивания состоит в наличии неопределенностей – внешних возмущений и шумов измерений. Достоинством скользящего наблюдателя [6, 8], оценивающего переменную  $x_2(t)$ , является то, что, будучи построенный на основе модели (2), свободной от возмущения и шумов измерений, он дает точную оценку за конечное время. Если, однако, эта модель содержит возмущения, то такая оценка будет иметь ошибку, не стремящуюся к нулю; шумы измерений дополнительно ухудшают качество такого наблюдателя.

Существует ряд методов оценивания множества допустимых значений состояния, не имеющих структуры наблюдателя и основанных на механизме предиктор/корректор, где множество предсказанных значений вкладываются в различные геометрические формы, в частности, зонотопы [9]. Проведенное в [1] на конкретном примере моделирование показало, что интервальный наблюдатель дает интервалы, существенно (в 2-3 раза) более узкие, чем оценивание на основе механизма предиктор/корректор.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № (23-29-00191), [https://rscf.ru/project/\(23-29-00191\)](https://rscf.ru/project/(23-29-00191)).

## Список литературы

1. Ефимов Д.В., Раиссии Т. Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // Автоматика и телемеханика. 2016. № 2. С. 5-49.
2. Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L. Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // IET Circuits Devices Syst. 2020. Vol. 14. P. 721-740.
3. Кремлев А.С., Чеботарев С.Г. Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56, № 4. С. 42-46.
4. Mazenc F., Bernard O. Asymptotically Stable Interval Observers for Planar Systems with Complex Poles // IEEE Trans. Automatic Control. 2010. Vol. AC-55, No. 2. P. 523-527.
5. Yi Z., Xie W., Khan A., Xu B. Fault detection and diagnosis for a class of linear time-varying discrete-time uncertain systems using interval observers // Proc. 39th Chinese Control Conf., July 27-29, 2020, Shenyang, China. P. 4124-4128.
6. Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е. Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 18-35.
7. Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю. Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // Автоматика и телемеханика. 2017. № 9. С. 34-48.
8. Tan C., Edwards E. Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2003. Vol. 13. P. 443-463.
9. Le V., Stoica C., Alamo T., Camacho E., Dumur D. Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems // Automatica. 2013. Vol. 49 P. 3418-3424.