

СОПОСТАВЛЕНИЕ СУБОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ НЕЛИНЕЙНОГО ТИПА

О.А. Степанов

АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»
Россия, 197046, Санкт-Петербург, Малая Посадская ул., 30
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
E-mail: soalax@mail.ru

А.М. Исаев

АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»
Россия, 197046, Санкт-Петербург, Малая Посадская ул., 30
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
E-mail: itmo_student@mail.ru

В.А. Васильев

АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»
Россия, 197046, Санкт-Петербург, Малая Посадская ул., 30
Университет ИТМО
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49
*Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)*
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Профессора Попова ул., 5 лит. Ф
E-mail: vasiliev_vl.a@mail.ru

Ключевые слова: рекуррентные алгоритмы, фильтрация, сопоставление, погрешность оценивания, нелинейные измерения, марковский процесс.

Аннотация: В рамках байесовского подхода рассматривается и сопоставляются по точности, состоятельности и вычислительной сложности два рекуррентных алгоритма решения задачи фильтрации марковского процесса, задаваемого линейным дифференциальным стационарным уравнением, по нелинейным измерениям. Приводится пример, иллюстрирующий их достоинства и недостатки.

1. Введение

Хорошо известно, что для задач нелинейной фильтрации не существует простого в вычислительном отношении алгоритма нахождения оптимальной оценки и соответствующей ей матрицы ковариаций погрешностей оценивания. Это порождает необходимость построения упрощенных (субоптимальных) алгоритмов [1-5]. Такие алгоритмы, с одной стороны, должны обеспечивать точность, близкую к потенциальной, достигаемой с помощью оптимального алгоритма, и обладать свойством состоятельности, означающим совпадение вырабатываемых в алгоритме расчетных матриц ковариаций с их действительными значениями, а с другой – не

предъявлять значительных требований к вычислительным средствам при их реализации [3, 5, 6]. Успех в их построении в значительной степени зависит от учета специфических особенностей конкретной решаемой задачи.

В настоящей работе рассматривается одна из возможных, востребованных на практике задач такого рода – задача фильтрации марковского процесса, описываемого линейным стационарным дифференциальным уравнением с использованием нелинейных измерений. На примере её решения обсуждаются два варианта построения алгоритмов оценивания, основанных на применении последовательного метода Монте-Карло – фильтра частиц: один из них традиционный, создающий возможность вычисления точности, близкой к точности оптимального алгоритма, а другой, предлагаемый в настоящей работе, – основан на представлении оцениваемого процесса в виде суммы квазидетерминированной (квазислучайной) и случайной составляющих. В докладе формулируется постановка решаемой задачи и описывается предлагаемая модификация традиционного фильтра частиц, приводится пример задачи фильтрации, и, опираясь на полученные результаты моделирования, обсуждаются достоинства и недостатки рассматриваемых алгоритмов.

2. Постановка задачи и описание алгоритмов

Считаем, что n -мерный марковский случайного процесс $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$, задан с помощью линейного стационарного уравнения в виде

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Fx(t) + Gw(t),$$

где $x(t_0) = x_0$ – n -мерный случайный гауссовский вектор с функцией плотности распределения вероятности (ф.п.р.в.) $p(x_0) = N(x_0; \bar{x}_0, P_0)$, \bar{x}_0 – математическое ожидание, P_0 – матрица ковариаций; $w(t)$ – n_w -мерный центрированный гауссовский белый шум интенсивности Q , не зависящий от x_0 ; F , G и Q – известные постоянные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times n_w$, $n_w \times n_w$.

Ставится задача оценивания процесса (1) по m -мерным дискретным измерениям

$$(2) \quad y_k = h_k(z_k) + v_k, k = 1, 2, \dots, z_k = Hx(t_k),$$

выполняемым на интервале $t_k \in T > 0$, где k – индекс дискретного времени, v_k – m -мерный центрированный дискретный гауссовский белый шум, не зависящий от x_0 и $w(t)$, с известной матрицей ковариации R_k , H – известный постоянный вектор размерности n .

Известно, что при решении задачи фильтрации в рамках байесовского подхода оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{x}(t)^{\text{ОПТ}}$ и условная матрица ковариаций $P^{\text{ОПТ}}$ определяются в виде [1,3,8]:

$$(3) \quad \hat{x}^{\text{ОПТ}}(t) = \int x(t)p(x(t)/Y_k)dx(t), P^{\text{ОПТ}}(t) = E_{p(x(t)/Y_k)} \left\{ (x(t) - \hat{x}^{\text{ОПТ}}(t))(x(t) - \hat{x}^{\text{ОПТ}}(t))^T \right\},$$

где $p(x(t)/Y_k)$ – апостериорная (условная) к набору измерений $Y_k = (y_1, \dots, y_k)^T$ ф.п.р.в. Подчеркнем, что оптимальная оценка минимизирует условную (3) и безусловную матрицу ковариаций погрешностей оценивания, определяемую как [6]

$$(4) \quad \bar{P}^{\text{ОПТ}}(t) = E_{p(x(t), Y_k)} \left\{ (x(t) - \hat{x}^{\text{ОПТ}}(t))(x(t) - \hat{x}^{\text{ОПТ}}(t))^T \right\}.$$

Диагональные элементы этих матриц определяют расчетные и действительные значения среднеквадратических погрешностей (СКП) оценивания.

Далее в работе рассматриваются и сопоставляются два алгоритма.

Один из них традиционный – основан на последовательном методе Монте-Карло обозначим далее как **алгоритм 1**. Это алгоритм описан, например, в работах [3,9,10].

Другой алгоритм, предлагаемый в настоящей работе, обозначим как **алгоритм 2**. Суть этого алгоритма заключается в учёте при его построении того факта, что процесс $x(t)$, определяемый решением уравнения (1), может быть представлен в виде

$$(5) \quad x(t) = x^{kc}(t) + x^c(t), x^{kc}(t) = \Phi(t - t_0)x_0, x^c(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) Gw(\tau)d(\tau), t_0 = 0,$$

где $x^{kc}(t)$ – квазидетерминированная и $x^c(t)$ – случайная составляющие процесса $x(t)$, а $\Phi(t - t_0)$ – фундаментальная матрица уравнения (1).

Соответственно процесс $z(t)$ можно представить в виде

$$(6) \quad z(t) = Hx^{kc}(t) + Hx^c(t) = \Delta(t) + \delta(t), \Delta(t) = H\Phi(t)x_0, \delta(t) = H \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) Gw(\tau)d(\tau).$$

Будем полагать, что среднеквадратическое отклонение (СКО) $\sigma_\delta(T)$ процесса $\delta(t)$ на интервале решения задачи T таково, что в области его возможных значений справедливо линеаризованное представление $h_k(z_k)$ и таким образом можем записать:

$$(7) \quad h_k(\Delta_k + \delta_k) \approx h_k(\Delta_k + \delta_k^{lin}) + \left. \frac{\partial h_k(\Delta_k + \delta_k)}{\partial (\delta_k)} \right|_{\delta_k = \delta_k^{lin}} (\delta_k - \delta_k^{lin}).$$

Введем вектор $\tilde{x} = (x_0^T, (x^c)^T)^T$. Нетрудно убедиться в том, что этот вектор может быть описан с помощью уравнения вида

$$(8) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}^c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x^c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(t)w(t) \end{bmatrix}, \tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание приведенные соотношения, замечаем, что исходную задачу можно свести к задаче оценивания составного вектора $\tilde{x} = (x_0^T, (x^c)^T)^T$, описываемого (8) и включающего вектор начальных условий и случайную составляющую x^c , по измерениям (7). Её особенность заключается в том, что при использовании метода Монте-Карло нелинейность задачи удается учитывать только по отношению к вектору постоянных параметров, а наличие второго слагаемого учитывать, воспользовавшись процедурой аналитического интегрирования по части переменных. При синтезе алгоритма это приведет к использованию банка фильтров Калмана.

3. Пример

Рассмотрим следующий иллюстрирующий пример, в котором

$$(9) \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = [1 \quad 0].$$

Нетрудно заметить, что в таком случае процесс $z(t)$ будет представлять собой сумму полинома первой степени и второго интеграла от белого шума

Нелинейные измерения (2) имеют вид

$$(10) \quad y_k = h(z_k) + v_k = a_1 + a_2 x_{1,k} + a_3 x_{1,k}^2 + a_4 x_{1,k}^3 + v_k,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 - известные коэффициенты.

Алгоритм 1 будем строить для оценивания процесса (1) по измерениям (10).

Далее конкретизируем **алгоритм 2**, для чего введём в рассмотрение четырёхмерный вектор \tilde{x}_k . Используя известные процедуры дискретизации, не трудно убедиться, что \tilde{x}_k будет описываться следующим уравнением:

$$(11) \quad \tilde{x}_k = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_k^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{k-1}^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma \xi_k \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}, \tilde{P}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = q\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} \Delta t/\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\xi_k = \begin{bmatrix} 0 \\ w_k \end{bmatrix}$, а w_k – дискретный белый шум единичной дисперсии.

Измерения будут иметь вид (7) и при этом
 (12) $\Delta_k = H\Phi x_0 = x_{1,0} + x_{2,0}k\Delta t$, $\delta_k = Hx_k^c = H\Phi x_{k-1}^c + \Gamma\xi_k$.

Для реализации субоптимального алгоритма применим процедуру аналитического интегрирования по части переменных, основанную на представлении плотности $p(\tilde{x}_k/Y_k)$ в виде $p(\tilde{x}_k/Y_k) = p(x_k^c/x_0, Y_k)p(x_0/Y_k)$.

Несложно заметить, что при фиксированном x_0 плотность $p(x_k^c/x_0, Y_k)$ будет гауссовской. Тогда её нахождение сводится к решению линейной гауссовской задачи фильтрации вектора x_k^c по измерениям (7) с использованием фильтра Калмана. Плотность же $p(x_0/Y_k)$ может быть аппроксимирована с использованием метода Монте-Карло или метода точечных масс в виде взвешенного набора дельта-функций [3].

4. Результаты моделирования

Сопоставление алгоритмов проведём с точки зрения точности, состоятельности и вычислительной сложности, используя методику, описанную в [7]. В качестве базового алгоритма, относительно которого проводилось сопоставление по точности, был использован **алгоритм 1** ($\mu = \text{Алг. 1}$) с количеством точек в методе Монте-Карло $N = 10^5$. **Алгоритм 2** ($\mu = \text{Алг. 2}$) был реализован в двух вариантах: при $N = 300$ и при $N = 1000$. Вычислительная сложность анализировалась относительно Алг. 1. Моделирование проводилось при следующих параметрах: $\bar{x}_0 = [-5 \ 0.5]^T$, $P_0 = \text{diag}[(2.5)^2 \ (0.05)^2]$, $q = 0.05$, $\Delta t = 1 \text{ с.}$, $t = 20 \text{ с.}$, $r = 0.1$, $a_1 = 0.0875$, $a_2 = -0.1825$, $a_3 = a_4 = 0.01$. На рис. 1 приведены результаты расчёта коэффициентов точности ξ_k^μ и состоятельности ζ_k^μ . Положительные значения коэффициента $\xi_k^\mu \cdot 100\%$ в процентном соотношении показывают увеличение действительной СКП Алг. 2 по отношению к действительной СКП базового алгоритма, а положительные значения $\zeta_k^\mu \cdot 100\%$ – превышение расчетной СКП анализируемого алгоритма по сравнению с её действительным значением.

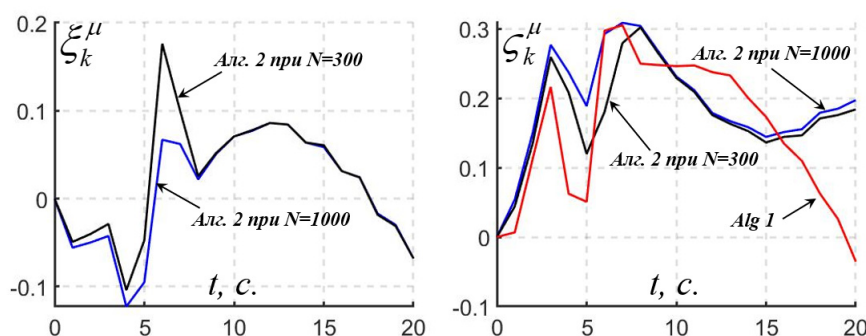


Рис. 1. Результаты расчёта коэффициентов точности и состоятельности.

Из рис. 1 следует, что к 20 с. коэффициенты ξ_k^μ и ζ_k^μ , характеризующие точность и состоятельность Алг. 2, при $N = 300$ и при $N = 1000$ совпадают, а коэффициент $\zeta_k^{\text{Алг. 1}}$ становится отрицательным. Последнее означает, что Алг. 1 вырабатывает заниженное значение расчетной СКП, т.е. вырабатываемая оценка точности является оптимистичной. При увеличении времени моделирования ($t > 20 \text{ с.}$) Алг. 1 теряет свойство состоятельности и проигрывает Алг. 2 в точности.

В результате расчетов коэффициента вычислительной сложности T'' было показано, что Алг. 2 при $N = 300$ проще Алг. 1в вычислительном плане более, чем в 30 раз.

6. Заключение

Для решения задачи фильтрации марковского процесса, описываемого линейным стационарным уравнением, по нелинейным измерениям, предложено выделять в составе оцениваемого процесса квазидетерминированную и случайную составляющие.

Описан субоптимальный алгоритм, учитывающий наличие двух составляющих в структуре оцениваемого процесса.

На примере задачи оценивания процесса, представляющего собой сумму полинома первой степени и второго интеграла от белого шума, по нелинейным измерениям полиномиального типа, проведено сопоставление с алгоритмом, направленным на получение оптимальной оценки и проиллюстрированы преимущества предложенного алгоритма.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00626, <https://rscf.ru/project/23-19-00626/>.

Список литературы

1. Jazwinski A.H. Stochastic process and filtering theory. New York: Academic Press, 1970.
2. Ярлыкков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь. 1993. 461 с.
3. Степанов О.А. Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации СПб: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 1998. 370 с.
4. Шахтарин Б.И. Нелинейная оптимальная фильтрация в примерах и задачах. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений радиотехнических и приборных специальностей. Москва, 2008.
5. Dunik, J., Biswas, S.K., Dempster, A.G., Pany, T., Closas, P., State Estimation Methods in Navigation: Overview and Application // IEEE A&E Systems Magazine. 2020. Vol. 12, No. 35. P. 16-31
6. Дмитриев С.П., Шимелевич Л.И. Нелинейные задачи обработки навигационной информации. Л.: ЦНИИ «РУМБ», 1977. 84 с.
7. Степанов О.А., Исаев А.М.. Методика сравнительного анализа рекуррентных алгоритмов нелинейных фильтрации в задачах обработки навигационной информации на основе предсказательного моделирования. // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31. № 3 (122). С. 48-65. EDN: MVWKG6.
8. Chen Z. Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond. Adaptive Systems Lab., McMasterUniv., Hamilton, Canada, 2003.
9. Doucet, A., Freitas, N., Gordon, N. Sequential Monte Carlo Methods in Practice, New York, NY: Springer, 2001, 590 p.
10. Степанов О.А., Торопов А.Б. Применение последовательных методов Монте-Карло с использованием процедур аналитического интегрирования при обработке навигационной информации // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. М.: Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 3324-3337.