УДК 519.7

СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩЕГО И КАЛМАНОВСКОГО ФИЛЬТРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ

М.В. Хлебников
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: khlebnik@ipu.ru

Ключевые слова: линейная система, внешние возмущения, фильтрация, фильтр Калмана, наблюдатель Люенбергера, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

Аннотация: Обсуждается новый подход к решению задачи фильтрации при произвольных ограниченных внешних возмущениях и/или погрешностях измерений. Соответствующий алгоритм, предполагающий сведение исходной задачи к задаче матричной оптимизации, обладает невысокой вычислительной сложностью. Его существенными с инженерно-практической точки зрения преимуществами является возможность ограничения нормы матрицы коэффициентов усиления, а также возможность построения оптимальных матриц коэффициентов усиления по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности. На примере трех различных постановок задач демонстрируется работоспособность и эффективность предлагаемого алгоритма по сравнению с фильтром Калмана.

1. Введение

Классическая постановка задачи фильтрации при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана [1]. Однако часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными; в этом случае можно строить гарантирующие (а не вероятностные) оценки состояний. В [2, 3] рассматривалась проблема фильтрации с ограниченными неслучайными возмущениями для стационарных задач: искалась оценка состояния такая, что ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид для всех моментов времени, то есть оценка является равномерной, а сам фильтр искался в классе линейных стационарных фильтров. В этом классе задач и оценок проблема оказалась полностью разрешимой: удалось построить оптимальный фильтр и оценку состояния. С технической точки зрения в [2, 3] был применен аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) [4, 5].

С другой стороны, в последнее время стал очень популярным подход к задачам управления линейными системами как к задачам оптимизации, однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно. В [6] подобный подход был впервые применен к линейно-квадратичной задаче, в [7] – к задачам с внешними возмущениями, в [8] – к задаче синтеза обратной связи по выходу при помощи наблюдателя, а в [9] – к задаче синтеза ПИД-регуляторов.

В настоящем докладе, цель которого состоит в упрощении алгоритма вычисления гарантирующего фильтра и его численном сравнении с фильтром Калмана, продолжаются обе эти линии исследований. В нем обсуждается оптимизационный алгоритм решения задачи фильтрации при неслучайных ограниченных внешних возмущениях, который обладает невысокой вычислительной сложностью, предполагая на каждом итерационном шаге лишь решение уравнений Ляпунова. При этом существенным с инженерно-практической точки зрения преимуществом предлагаемого подхода по сравнению с ЛМН-подходом является возможность ограничения величины матрицы фильтра. Как показывают примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является эффективной и приводящей ко вполне удовлетворительным результатам. Также в отличие от фильтра Калмана в рамках предлагаемого подхода оказывается возможным строить оптимальные матрицы фильтра по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1u_k + D_1w_k,\\ y_k &= Cx_k + B_2u_k + D_2w_k,\\ z_k &= C_1x_k, \end{aligned} \tag{1}$$

с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, начальным условием x_0, входом $u_k \in \mathbb{R}^p$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^\ell$, оцениваемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением (шумом) $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени: $\|w_k\| \leqslant 1$ для всех $k = 0, 1, \ldots$, пара (A, D_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема.

Состояние x_k системы недоступно измерению, и информация о системе дается ее выходом y_k. Для оценивания выхода z_k построим фильтр, описываемый линейным разностным уравнением относительно оценки состояния $\widehat{x}_k$:

$$\widehat{x}_{k+1} = A\widehat{x}_k + B_1u_k + L(y_k - C\widehat{x}_k - B_2u_k), \quad \widehat{x}_0 = 0, \tag{2}$$

где $L \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$. Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее – он является линейным стационарным, подлежит выбору лишь постоянная матрица L. Эта структура фильтра такая же, как и в известном наблюдателе Люенбергера [10,11]. По сути, можно рассматривать этот фильтр как обобщение наблюдателя Люенбергера на задачи с помехами. Задачей является минимизация ошибки оценки

$$z_k - \widehat{z}_k = C_1(x_k - \widehat{x}_k) = C_1e_k,$$

где $e_k = x_k - \widehat{x}_k$ – невязка, удовлетворяющая согласно (1), (2) разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC)e_k + (D_1 - LD_2)w_k, \quad e_0 = x_0.$$

Важно отметить, что здесь рассматривается случай неслучайных ограниченных помех. Для случайного, гауссовского шума вполне естественно применять калмановскую фильтрацию, однако мы хотим привлечь внимание к фильтрации с ограниченными шумами. Также на демонстрационных примерах будет рассмотрено, как работает фильтр Калмана с ограниченными помехами и наоборот – к чему приведет применение к случайным помехам рассматриваемой модели с ограниченным шумом. Заметим также, что мы рассматриваем более общую постановку задачи, чем в [2]: в описании системы присутствует вход u_k.

3. Гарантирующий фильтр

Предлагается гарантирующий подход к решению задачи фильтрации при ограниченных шумах, для которого можно явным образом выписать прямые формулы, основанные на градиентом спуске. Один из основных результатов представлен следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть L^*, P^* – решение оптимизационной задачи*

$$\min f(L,\alpha), \quad f(L,\alpha) = \operatorname{tr} C_1 P C_1^{\mathrm{T}} + \rho \|L\|_F^2,$$

при ограничении

$$\frac{1}{\alpha}(A - LC)P(A - LC)^{\mathrm{T}} - P + \frac{1}{1-\alpha}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^{\mathrm{T}} = 0 \qquad (3)$$

относительно матричных переменных $P \in \mathbb{S}^n$, $L \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ и скалярного параметра $0 < \alpha < 1$.

Тогда ошибка оценки $z_k - \widehat{z}_k$ выхода системы (1) с нулевым начальным условием при помощи наблюдателя (2) с матрицей L^* заключена в минимальный ограничивающий эллипсоид с матрицей $C_1 P^* C_1^{\mathrm{T}}$.

Предлагается регулярный итеративный подход к решению сформулированной в теореме 1 задачи матричной оптимизации, в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной L и минимизации по α по методу Ньютона. Приведем принципиальную схему алгоритма.

Алгоритм 1.

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным допустимым приближением L_0. Вычисляем величину $\alpha_0 = \big(1 + \rho^2(A - L_0 C)\big)/2$.

2. На j-й итерации, имея величины L_j и α_j, находим градиент $H_j = f'_L(L_j, \alpha_j)$. Если $\|H_j\| \leqslant \varepsilon$, то L_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j H_j,$$

при этом длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

а. L_{j+1} обращает матрицу $(A - LC)/\sqrt{\alpha_j}$ в шуровскую;

б. $f(L_{j+1}, \alpha_j) \leqslant f(L_j, \alpha_j) - \tau\gamma_j \|H_j\|^2$.

4. Для найденного L_{j+1} решаем задачу минимизации $f(L_{j+1}, \alpha)$ по α по методу Ньютона:

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'_\alpha(L_{j+1}, \alpha_j)}{f''_{\alpha\alpha}(L_{j+1}, \alpha_j)}$$

и получаем α_{j+1}. Переходим к п. 2.

В Алгоритме 1 величины $f'_L(L,\alpha)$, $f'_\alpha(L,\alpha)$ и $f''_{\alpha\alpha}(L,\alpha)$ вычисляются следующим образом:

$$f'_L(L,\alpha) = 2\Big[\rho L - \frac{1}{\alpha}Y(A-LC)PC^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1-\alpha}Y(D_1-LD_2)D_2^{\mathrm{T}}\Big],$$

$$f'_\alpha(L,\alpha) = \operatorname{tr} Y\Big[\frac{1}{(1-\alpha)^2}(D_1-LD_2)(D_1-LD_2)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\alpha^2}(A-LC)P(A-LC)^{\mathrm{T}}\Big],$$

$$f''_{\alpha\alpha}(L,\alpha) = 2\operatorname{tr} Y\Big[\frac{1}{(1-\alpha)^3}(D_1-LD_2)(D_1-LD_2)^{\mathrm{T}} + \\ + \frac{1}{\alpha^3}(A-LC)(P-X)(A-LC)^{\mathrm{T}}\Big],$$

где матрицы P, Y и X являются решениями дискретных уравнений Ляпунова (3),

$$\frac{1}{\alpha}(A-LC)^{\mathrm{T}}Y(A-LC) - Y + C_1^{\mathrm{T}}C_1 = 0$$

и

$$\frac{1}{\alpha}(A-LC)X(A-LC)^{\mathrm{T}} - X + \frac{1}{(1-\alpha)^2}(D_1-LD_2)(D_1-LD_2)^{\mathrm{T}} - \\ - \frac{1}{\alpha^2}(A-LC)P(A-LC)^{\mathrm{T}} = 0$$

соответственно.

4. Примеры

Рассмотрим объект

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1u_k + Gw_k, \\ y_k &= Cx_k + B_2u_k + v_k, \end{aligned} \tag{4}$$

с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, начальным условием x_0, входом $u_k \in \mathbb{R}^p$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^\ell$, шумом $w_k \in \mathbb{R}^m$ и ошибкой измерений $v_k \in \mathbb{R}^\ell$; величины w_k и v_k предполагаются независимыми.

Применительно к (4) фильтр Калмана имеет следующий вид – в предположении, что величины w_k и v_k распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами Q и R соответственно.

Этап экстраполяции:

$$\widehat{x}_{k+1|k} = A\widehat{x}_{k|k} + B_1u_k, \qquad P_{k+1|k} = AP_{k|k}A^{\mathrm{T}} + GQG^{\mathrm{T}}.$$

Этап коррекции:

$$K_k = P_{k|k-1}C^{\mathrm{T}}(CP_{k|k-1}C^{\mathrm{T}} + R)^{-1},$$

$$\widehat{x}_{k|k} = \widehat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C\widehat{x}_{k|k-1} - B_2u_k), \qquad P_{k|k} = (I - K_kC)P_{k|k-1}.$$

Будем рассматривать три следующие постановки задачи.

1. Модель $\mathcal{M}_1$ со случайными помехами: шум w_k распределен нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Q, а погрешность измерений v_k имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей R, то есть $w_k \sim N(0, Q)$, $v_k \sim N(0, R)$.

2. Модель $\mathcal{M}_2$ со случайными ограниченными помехами: величина w_k равномерно распределена на кубе $[-w, w]^m$, а величина v_k равномерно распределена на кубе $[-v, v]^\ell$, то есть $w_k \sim U([-w, w]^m)$, $v_k \sim U([-v, v]^\ell)$.

3. Модель $\mathcal{M}_3$ с неслучайными ограниченными помехами: величины w_k и v_k могут принимать произвольные значения на кубах $[-w, w]^m$ и $[-v, v]^\ell$ соответственно: $\|w_k\|_\infty \leqslant w$, $\|v_k\|_\infty \leqslant v$.

В рамках этих моделей в докладе сравнивается работоспособность фильтра Калмана и гарантирующего фильтра (несмотря на то, что гарантирующие оценки не обоснованы для модели $\mathcal{M}_1$, а фильтр Калмана – для модели $\mathcal{M}_3$).

5. Заключение

Предложен новый подход к задаче синтеза гарантирующего фильтра, основанный на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев. Рассмотренные примеры демонстрируют работоспособность и эффективность предлагаемого алгоритма; проведено его сравнение с фильтром Калмана на трех различных постановках задач.

Список литературы

1. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Journal of Basic Engineering. 1960. Vol. 82, No. 1. P. 35–45.
2. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418, № 6. С. 749–753.
3. Хлебников М.В., Поляк Б.Т. Фильтрация при произвольных ограниченных внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств // 13-я Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2020). Материалы XXXII Конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. Санкт-Петербург, 6–8 октября 2020 г. СПб.: Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2020. С. 291–294.
4. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
5. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
6. Fatkhullin I., Polyak B. Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59, No. 5. P. 3887–3911.
7. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2021. № 9. С. 86–115.
8. Поляк Б.Т., Хлебников М.В Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2022. № 3. С. 7–32.
9. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // Автоматика и телемеханика. 2022. № 11. С. 62–82.
10. Luenberger D.G. Observing the State of a Linear System // IEEE Transactions on Military Electronics. 1964. Vol. 8, No. 2. P. 74–80.
11. Luenberger D.G. An Introduction to Observers // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. AC-16, No. 6. P. 596–602.