УДК 681.518

О РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

В.И. Ширяев
Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: shiriaevvi@susu.ru

Ключевые слова: алгоритмы оценивания, минимаксный, гарантирующий, фильтр Калмана, информационное множество, инвариантный, доверительный эллипсоид, пересечение множеств.

Аннотация: Предлагается минимаксный алгоритм фильтрации (МАФ), основанный на применении 3-х фильтров (минимаксного фильтра (ММФ), фильтра Калмана (ФК) и гарантирующего фильтра (ГФ)) и позволяющий повысить точность оценивания и придать свойство адаптивности предлагаемому МАФ. Обсуждаются реализации предложенного алгоритма. Рассматривается версия алгоритма исключающее операцию сложение множеств для снижения вычислительных затрат. алгоритма гарантированного оценивания для реализации МАФ в реальном времени. Приводится пример.

1. Введение

Несмотря на то, что гарантированный подход к оцениванию вектора состояния динамических систем и алгоритм минимаксной фильтрации был предложен вскоре после публикации работы о ФК, применение алгоритмов гарантированного оценивания сдерживается излишним пессимизмом оценок и большими (по сравнению с ФК) вычислительными ресурсами, необходимыми для реализации. Поэтому актуальными являются подходы, направленные на снижение указанных недостатков гарантированного подхода к оцениванию. Различные аспекты задач оценивания при неполноте информации отражены в работах прежде всего следующих авторов: Калман Р., Красовский Н.Н., Красовский А.А., Куржанский А.Б., Кац И.Я., Кунцевич В.М., Черноусько Ф.Л., Шматков А.М., Матасов А.И., Поляк Б.Т., Хлебников В.М., Степанов О.А., Schweppe F.C., Bertsecas D.P. и др [1-9]. В настоящей работе в целях повышения точности гарантированного оценивания (снижение пессимизма оценок) рассматривается построение алгоритма объединяющего результаты оценивания трех параллельно работающих фильтров и использующих разную априорную информацию о возмущениях и ошибках измерений. Такими фильтрами выбраны минимаксный [2-4, 10-12], гарантирующий [5, 7] и Калмана [1, 6, 8, 13].

2. Основные соотношения

Для повышения точности оценивания (снижение пессимизма) в гарантированном подходе предлагается использование результатов фильтрации 3-х фильтров на каждом k-м шаге. Пусть $x_k \in R^n$ вектор состояния некоторой динамической системы

(1) $$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k,\ y_{k+1} = Cx_{k+1} + v_{k+1},\ k = 0,1\ldots,$$

где $x_k \in \mathrm{R}^n, u_k \in \mathrm{R}^m, w_k \in \mathrm{R}^p, y_k \in \mathrm{R}^r, v_k \in \mathrm{R}^r$ – векторы состояния, управления, возмущения, измерения, ошибок измерения соответствующей размерности. Матрицы в системе (1) и вектор управления u_k согласованной размерности предполагаются известными, а система управляема и наблюдаема.

О начальном состоянии x_0 системы (1), возмущениях w_k и ошибках измерения v_{k+1} известна лишь минимальная априорная информация [2-5, 9-12], которая будет конкретизирована при описании каждого фильтра.

При построении **первого** фильтра – ММФ, для оценивания вектора состояния системы (1), априорная информация о начальном состоянии системы x_0, возмущениях w_k и ошибках измерений v_{k+1} задается в виде выпуклых многогранников, из которых они могут принимать любые значения [2-4, 10-12]

(2) $$x_0 \in X_0 = \{x_0 : A_0 x_0 \le b_0\},\ w_k \in W = \{w_k : A_w w_k \le b_w\},\ v_k \in V = \{v_k : A_v v_k \le b_v\}$$

Искомая оценка вектора состояния x_k формируется ММФ в виде информационного множества $\overline{X}_{k+1}$ [2-4, 9-12], рекуррентные соотношения которого имеют вид

(3) $$x_{k+1} \in \overline{X}_{k+1},\ \overline{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}],\ k = 0,1,...,$$
$$X_{k+1/k} = A\overline{X}_k + Bu_k + GW,\ X[y_{k+1}] = \{x \in R^n : Cx + v = y_{k+1} \forall v \in V\}.$$

где $X_{k+1/k}$ – множество прогнозов, $X[y_{k+1}]$ – множество, совместное с измерениями.

Второй фильтр – ГФ, рассматриваемый в [5, 7], предложен для оценивания вектора состояния системы (1), начальное состояние которой x_0 неизвестно и на него не наложено никаких ограничений, а о внешних возмущениях $w_k \in R^m$ и ошибках измерений v_{k+1} известно, только то, что они удовлетворяют ограничениям

(4) $$\|w_k\| \le 1,\ \|v_k\| \le 1,\ \mathrm{k} = 0,1,\ldots,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора.

ГФ строится на основе метода инвариантных эллипсоидов и может быть записан в виде

(5) $$\breve{x}_{k+1} = Ax_k + L(y_k - C\breve{x}_k), \breve{x}_0 = 0,\ k = 0,1,...,$$

(6) $$x_k \in E_k = \{x : (x - \breve{x}_k)' P^{-1} (x - \breve{x}_k) \le 1\},$$

где постоянные матрицы L, P, отыскиваются с помощью аппарата линейных матричных неравенств [5, 7]. Достоинство фильтра (5) в гарантированной оценке, т. е. $\breve{x}_k$ гарантировано принадлежит инвариантному эллипсоиду (6), если $x_0 - \breve{x}_0 \in E_0$ (малые уклонения), то и $x_k - \breve{x}_k \in E_k$, $k = 1,2\ldots$ А из $x_0 - \breve{x}_0 \notin E_0$ (большие уклонения), следует $x_k - \breve{x}_k \to E_k$, $k \to \infty$.

И наконец, **третий** фильтр – это ФК [1,6,8,13], рассматривается для модели процессов (1), в которой априорная информация о начальном состоянии x_0 системы, возмущениях w_k и ошибках измерения v_{k+1} такова: известно, что x_0 – центрированная случайная величина с известной матрицей ковариаций P_0, w_k, v_{k+1} – некоррелированное между собой и с начальным состоянием x_0 центрированные белые шумы с нулевым средним и заданными ковариационными матрицами Q, R.

Для оценки $\hat{x}_{k+1}$, вырабатываемой ФК,

(7) $$\hat{x}_{k+1} = Ax_k + Bu_k + K_{k+1}[y_{k+1} - C(A\hat{x}_k + Bu_k)],\ K_{k+1} = P_{k+1} C' R^{-1},\ k = 0,1,...,$$

может быть построен доверительный эллипсоид

(8) $$Эл_{k+1} = \{x : (x - \hat{x}_{k+1}) P_{k+1}^{-1} (x - \hat{x}_{k+1}) \le \ell^2,$$

где P_{k+1} – ковариационная матрица ошибок оценивания, которая вычисляется согласно стандартным соотношениям ФК [13]. Вероятность выполнения условия $x_{k+1} \in Эл_{k+1}$ равна 0, 989 при оптимальных оценках $\hat{x}_{k+1}$, для $x_{k+1} \in R^2$ и $\ell = 3$. Этот эллипсоид далее трактуется как информационное множество $\overline{X}_{k+1}$.

3. Минимаксный алгоритм фильтрации

Для оценки вектора состояния x_k системы (1) применим 3 фильтра (ММФ, ГФ, ФК), для которых верно $x_k \in X_{kj},\ j = 1,2,3,\ k = 0,1,2,\ldots$, где соответственно $X_{k1} = \overline{X_k}$ – информационное множество ММФ (4), $X_{k2} = \mathrm{E}_k$ – инвариантный эллипсоид (6), $X_{k3} = conv\,\mathcal{X}_k,\ \mathcal{X}_k = Эл_{k-1} \cup Эл_k$, где $Эл_k$ – доверительный эллипсоид ФК (8), $conv$ $(\cdot)$ – выпуклая оболочка множества. Рассматривается случай, когда для любых 2-х смежных моментов времени $k-1,\ k$, хотя бы один раз $x_i \in Эл_i, i = k-1,\ k$.

Предлагается МАФ, в котором осуществляется одновременное применение 3-х параллельно работающих фильтров ММФ, ГФ, ФК так, что получаем множество

(9) $$X_k = \cap_{j=1,2,3} X_{kj},\ x_k \in X_{kj},\ j = 1,2,3;\ k = 1,2,3,\ldots,$$

которое будем называть информационным множеством МАФ, по аналогии с информационным множество $\overline{X_k}$ ММФ также и множество X_{k3} ФК. Множество прогнозов определяется как $X_{k+1/k} = AX_k + Bu_k + \Gamma W$. Отметим, что рассматриваются последовательности множеств в системе (1), для которых $x_k \in X_{kj}, j = 1,2,3,\ k = 1,2,3\ldots.$

Если чебышевский радиус множества $X_{k3},\ k = 1,2,3\ldots$, удовлетворяет заданным требованием по точности оценивания вектора x_k, то ФК позволяет в этом случае получать гарантированные множественные оценки в виде множеств $\mathcal{X}_k,\ k = 1,2,3,\ldots$ и его можно применить без привлечения ММФ и ГФ. Кроме того, наряду с применением в (9) 3-х фильтров, исходя из требований по точности может оказаться достаточным 2-х любых из 3-х фильтров, либо от ММФ использовать множество $X[y_{k+1}]$, либо множество прогнозов $X_{k+1/k}$ [2].

Для снижения вычислительных затрат необходимо исключить в алгоритме ММФ операции суммирования множеств в смысле Минковского [2]. В тех случаях, когда для возмущений w_k (1) возможно построение модели [11], то расширяя вектор состояния x_k, исключаем операцию суммирования множеств при построении множества прогнозов $X_{k+1/k}$. К исключению операции суммирования множеств приводит неявное задание информационных множеств системой линейных неравенств [11,12].

4. Пример

Следуя [7], рассмотрим систему (1) с вектором состояния $x_k = (x_{1k}, x_{2k})'$, управления $u_k = -0{,}98$, возмущениями $w_k = (w_{1k}, w_{2k})'$, измерениями $y_k \in R^1$ ошибками $v_k \in R^1$ и с матрицами вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0 & 1-b \end{pmatrix},\ B = (0{,}1)',\ C = (1{,}0),\ G = I,$$

которая описывает движение снаряда в вертикальной плоскости. В системе (1) $x_{1k} = s_y(k)$, $x_{2k} = v_y(k)$ – проекции координаты и скорости снаряда на ось y, $b = 10^{-4}$ – коэффициент сопротивления воздуха, $[k, k+1] = 0{,}1c$ – интервал времени между измерениями. Будем полагать, что возмущения w_k и ошибки измерения v_k (м) распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $Q = diag\{\sigma_{w1}^2, \sigma_{w2}^2\}$, $\sigma_{w1}^2 = 0{,}1$ м^2, $\sigma_{w2}^2 = 0{,}1$ м^2/с^2 и дисперсией $\sigma_v^2 = 500$ м^2.

Найдем оценку X_k (9) вектора состояния x_k, воспользовавшись результатами расчета [9] для ГФ, ФК, с начальными значениями оценок для ГА, ФК $\breve{x}_0 = \hat{x}_0 = 0$. Размерность оценок совпадает с размерностью вектора состояния x_k, $P_0 = diag\{\sigma_{x1}^2, \sigma_{x2}^2\}$, $\sigma_{x1}^2 = 0{,}1$ м^2, $\sigma_{x1}^2 = 10^5$ м^2/с^2. Для ММФ, в соответствии [9-12] с данными ФК, взяты множества (2) $X_0 = \{x_0 : |x_{i0}| \le 3\sigma_{xi}, i = 1{,}2\}$, $W = \{w_k : |w_{ki}| \le 3\sigma_{wi}, i = 1{,}2\}$, $V = \{v_k : |v_{ki}| \le 3\sigma_v\}$. Согласно [9-12], информационные множества X_{k1} ММФ, X_k МАФ строятся в виде многогранников (рис. 1), для этого $Эл_k$ ФК аппроксимируются сверху многогранником (рис. 2). Для упрощения построения множество X_{k3} состоит из 1-го эллипса $Эл_k$, причем $x_k \in Эл_k$ при $k = 0{,}1{,}2{,}3{,}70-73$.

На рис.1 представлены, на фазовой плоскости, результаты расчета траектории движения снаряда вдоль вертикальной оси для начального участка $t \in [0,\ 0{,}3]$ сек, $k = 0{,}1{,}2{,}3$ множества X_k (9), значения вектора состояния $x_k \in X_k$, измерения y_k.

На рис.2 – результаты аналогичных расчетов участка траектории для отрезка времени $t \in [7,\ 7{,}3]$ сек, $k = 70-73$, для которого переходные процессы в ГА и ФК можно считать закончившимися и для ФК матрица $P_k \cong const$. Вершины множеств $\overline{X}_k$, X_{k3} образующие множество $X_k = \overline{X}_k \cap \overline{X}_{k3}$ на рис. 2 затенены. На начальном участке траектории (рис. 1) в алгоритме ММФ (9) только для $k = 1$ множество $X_1 = X_{11} \cap X_{13}$

Из расчета множеств X_k МАФ (9), для которых гарантировано $x_k \in X_k$ для 2-х участков траектории $k = 0{,}1{,}2{,}3$ (рис. 1) и $k = \overline{70{,}73}$ (рис. 2) следует, что множества $X_k, k = 1{,}71-73$ формировались фильтрами ММФ и ФК для рассматриваемых исходных данных. Поскольку размеры множеств X_{k2} ГА и X_{k3} ФК значительно больше чем информационное множество $X_{k1} = \overline{X}_k$ ММФ и их расположение на фазовой плоскости таково, что множество X_1 (рис. 1) образовано пересечением 2-х множеств X_{11} и X_{13}, т.е. множествами ММФ и ФК. Для 2-го участка траектории (рис. 2) размеры множества X_{k3} уменьшились и оно пересекается со множеством $X_{k1} = \overline{X}_k$, что и приводит к повышению точности оценивания, т.к. $X_1 = X_{k1} \cap X_{k3}$. Т.о. информационные множества X_k, $k = 1{,}71-73$ МАФ (9) меньше множеств $X_{kj}, j = 1{,}2{,}3$ отдельных фильтров, что означает повышение точности гарантированного оценивания у МАФ по сравнению с ММА, ГА и ФК.

Отметим, что оценки $X_{k1} = X_k$ ММФ, а значит и оценки X_k МАФ зависят от реализовавшихся возмущений и ошибок измерений, также как и от множеств X_0, W, V.

В данном примере $X_{01} \supset Эл_0$ весьма грубая оценка x_{20} [7]. Более реалистическая оценка второй компоненты вектора $x_{20} \in [500,700]$ вектора x_k приводит, как показывают расчеты, к уменьшению множеств $X_k, k = 1,2,3$. Если при реализации процесса, как в рассмотренном примере (рис. 2), $|v_k| << 3\sigma_y$, то для ММФ такие измерения y_k мало информативны и $\overline{X}_{k+1} \cong X_{k+1/k}$. Если для ошибок измерения будет выполняться условно $|v_k| \le 3\sigma_y$, то размеры множества $\overline{X}_k$ [11,12] могут значительно уменьшаться, а значит и повышается точность оценивания МАФ.

Множество X_{k2} ГА значительно больше множества X_{k3} ФК и поэтому отсутствует в X_k МАФ в данном примере. Так, например, для $k = 76$ отношение больших осей эллипсов ГА и ФК более 6.

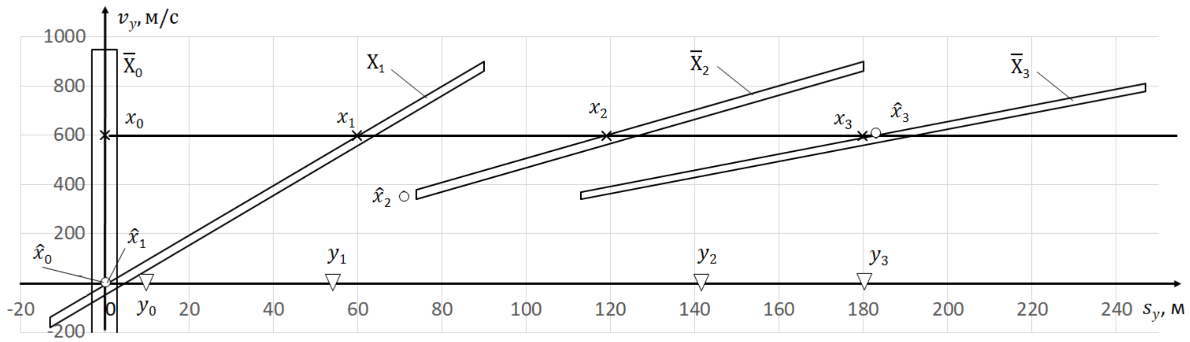

Рис. 1. Динамика множеств $X_k, \overline{X}_k$, оценок $\hat{x}_k$, измерения y_k траектория движения – линия проходящая через точки x_k, для начального участка траектории $k = 0,1,2,3$, на фазовой плоскости.

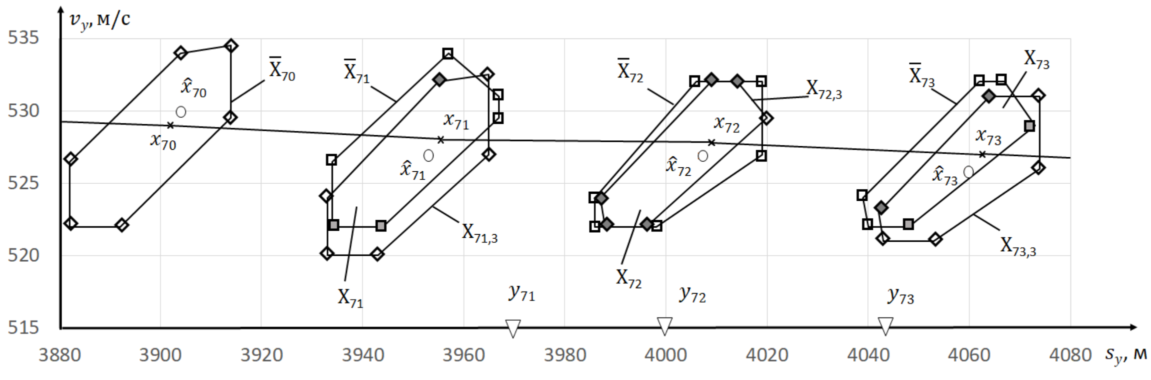

Рис. 2. Динамика множества $X_k, \overline{X}_k$, X_{k3}, оценок $\hat{x}_k$, измерения, y_k траектория движения – линия проходящая через точки x_k для участка траектории $k = 70,71,72,73$ на фазовой плоскости.

5. Заключение

Для повышения точности гарантированных оценок (снижения пессимизма оценок) предложен алгоритм МАФ использующий результаты работы 3-х параллельно работающих алгоритмов – минимаксного, гарантирующего и фильтра Калмана [7, 11, 13]. На примере показана возможность повышения точности гарантированного оценивания, путем пересечения множеств X_{k1} ММФ, X_{k2} ГА и X_{k3} ФК. Если чебышевский радиус множества X_{k3}, удовлетворяет требованием по точности оценивания вектора x_k, то ФК позволяет в этом случае получать гарантированные множественные оценки в виде множеств X_{k3}, и его можно применять без привлечения ММФ и ГФ.

Автор выражает искреннюю благодарность д.ф.-м.н., проф. М.В. Хлебникову за предоставление и обсуждение результатов расчета ГА и ФК.

Список литературы

1. Калман Р.Е. Идентификация систем с шумами // Успехи математических наук. 1985. Т. 40, № 4 (244). С. 27-41.
2. Кац И.Я., Куржанский А.Б. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 79-87.
3. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006. 262 с.
4. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1977.
5. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Доклады АН. 2008. Т. 418, № 6. С. 749-753.
6. Степанов О.А. Рекуррентное оценивание и фильтрация: предыстория и современное состояние // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 10-16.
7. Хлебников М.В. Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // Автоматика и телемеханика. 2023. № 4. С. 64-95.
8. Kalman R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering. 1960. No. 82. P. 35-45.
9. Schweppe F.C. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. Vol. 13, No. 1. P. 22-28.
10. Ширяев В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 229-237.
11. Ширяев В.И. Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности // Мехатроника. 2001. № 8. С. 2-5.
12. Ширяев В.И., Подивилова Е.О. Аппроксимация информационных множеств в задаче гарантированного оценивания состояния динамических систем в условиях неопределенности // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 10-16.
13. Степанов О.А. Методы обработки навигационной измерительной информации. СПб: Университет ИТМО, 2017. 196 с.