УДК (51-74)

ФИЛЬТРЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

О.О. Юферева

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, Софьи Ковалевской ул., 16

E-mail: olga.o.yufereva@gmail.com

Ключевые слова: фильтрация сигнала, взаимодействующие частицы, непрерывно-дискретные системы.

Аннотация: Фильтрация сигнала представляет собой задачу восстановления фазового состояния по зашумленным наблюдениям. Один из субоптимальных методов для решения этой задачи включает в себя построение динамики для облака взаимодействующих частиц. В данной работе представлен метод построения фильтра с использованием взаимодействующих частиц для задачи фильтрации, где фазовый процесс является непрерывным, а наблюдения дискретными и случайными по времени. В сравнении с классической непрерывной постановкой выявляется, что некоторые коэффициенты, ответственные за взаимодействие частиц, в данном случае зависят от эмпирической ковариации и не являются постоянными. На текущем этапе анализ проводится для линейной системы. Показана сходимость предложенного фильтра к оптимальному, и проведено сравнение с другими методами.

1. Введение

Развивающаяся в настоящее время теория сетевых систем управления порождает задачи фильтрации в которых фазовый процесс является непрерывный, но оценивается по дискретным наблюдениям, доступным в случайные моменты времени. Появление новой случайности вызвано тем, что в сетевых системах и управление, и обратная связь передаются между компонентами системы в виде информационных пакетов через сеть [1]; соответственно, в таких моделях базовые протоколы подразумевают получение информации в случайные дискретные моменты времени. Стандартным предположением является экспоненциальное распределение времени между наблюдениями, что означает пуассоновское распределение самих моментов наблюдений. Один из потенциальных методов решения нелийненых задач является аппроксимация распределений методами Монте-Карло; в задаче фильтрации анализ применимосьи таких методов представляет интерес даже для линейного случая [2]. В линейной гауссовой постановке с непрерывным временем можно показать, что по мере того, как число частиц стремится к бесконечности, эмпирическое среднее и ковариация сходятся к оптимальному среднему и ковариации фильтра Калмана-Бьюси. Фактически предельное поведение этих частиц описывается уравнением Маккина-Власова, которое также называют процессом среднего поля. Иными словами, частицы обеспечивают аппроксимацию процесса среднего поля и, одновременно, оптимального фильтра. Динамики таких частиц связаны друг с другом через эмпирическое среднее и эмпирические ковариации. В данной работе предложены фильтры частиц для задачи фильтрации с дискретными наблюдениям, распределенным во времени по Пуассону. В отличие от случая непрерывных наблюдений, оказывается, что некоторые коэффициенты динамики частиц, ответственные за взаимодействие частиц, в данном случае зависят от эмпирической ковариации и не являются постоянными. Представленные результаты продолжают работу [3].

2. Постановка задачи

2.1. Система

Мы рассматриваем $\mathbb{R}^n$ – значный фазовый процесс

$$\mathrm{d}x_t = Ax_t\,\mathrm{d}t + G\,\mathrm{d}\omega_t \tag{1}$$

с дискретными наблюдениями, принимающими значения в $\mathbb{R}^m$

$$y_{\tau_k} = Cx_{\tau_k} + \nu_{\tau_k}, \tag{2}$$

$$\tau_k = \inf\{t \mid N_t \geqslant k\}, \tag{3}$$

где N_t – процесс Пуассона, ω_t – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbb{R}^m$, $\nu_{\tau_k} \sim \mathcal{N}(0, V_{\tau_k})$, то есть матрицы V_{τ_k} предполагаются симметричными положительно определенными для каждого $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ вероятностное пространство. Матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $G \in \mathbb{R}^{n\times m}$ считаются постоянными. Можно рассмотреть монотонную неубывающую последовательность $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ со значениями в $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, представляющую моменты времени, в которые доступны измерения. С одной стороны, распределение моментов времени τ_k связано с процессом Пуассона N_t, как указано в (3), с другой стороны, процесс N_t подсчитывает, сколько наблюдений произошло: $N_t = \sum_i \delta_{\tau_i \leqslant t}$. Изучение задачи со случайными моментами наблюдений мотивировано приложениями, в которых информационные пакеты отправляются в дискретные, случайно распределенные моменты времени.

Для анализа удобнее определить процесс наблюдений как процесс с непрерывным временем и скачками. Так, далее все случайные процессы в этой статье считаются càdlàg, т.е. непрерывными справа и имеющими предел слева. Для пуассоновского процесса N стохастическое уравнение определяется следующим образом.

Определение 1. *[4, Sect. 2.1] Пусть f, G и g являются $\mathbb{R}^n$-, $\mathbb{R}^{n\times m}$- и $\mathbb{R}^m$-значными измеримыми càdlàg функциями. $\mathbb{R}^n$-значный càdlàg процесс $(e_t)_{t\geqslant 0}$ называется решением*

$$\mathrm{d}e_t = f(t, e_t)\mathrm{d}t + G(t, e_t)\mathrm{d}\omega_t + g(t, e_t)\mathrm{d}N_t. \tag{4}$$

если для почти всех траекторий N он удовлетворяет

$$\mathrm{d}e_t = f(t, e_t)\mathrm{d}t + G(t, e_t)\mathrm{d}\omega_t, \qquad \textit{for } t \in (\tau_k, \tau_{k+1}),\ k \in \mathbb{N}, \tag{5a}$$

$$e_{\tau_k} = \lim_{s\uparrow t}\big(e_s + g(s, e_s)\big), \qquad \textit{for } k \in \mathbb{N}, \tag{5b}$$

Существуют также методы стохастического интегрирования по мартингалам, полумартингалам и случайным мерам. Их все можно найти в [5]. Определение 1 может рассматриваться и как интеграл Лебега-Стильтьеса (для фиксированной траектории N) или как интеграл по полумартингалу; эти подходы буду эквивалентны в силу конечной вариации пуассоновского процесса [6, Ch.I, Th.22]. В этой нотации дискретные наблюдения (2) могут быть переписаны в виде непрерывного процесса

$$\mathrm{d}y_t = (Cx_t + v_t)\mathrm{d}N_t, \tag{6}$$

который является кусочно-постоянным процессом càdlàg с скачками в моменты времени τ_k и свойством $y_{\tau_k} = Cx_{\tau_k} + v_{\tau_k}$.

2.2. Задача фильтрации

2.2.1. Оптимальный фильтр. Задача фильтрации заключается в поиске стохастического процесса $\widehat{x}_t$, называемого оптимальным фильтром, который минимизирует среднеквадратичную ошибку, то есть реализует $\min \mathsf{E}\left[|x_t - \widehat{x}_t|_2^2 \mid \mathcal{Y}_t\right]$, где $\mathcal{Y}_t$ – сигма-алгебра, порожденная наблюдениями, доступными к моменту времени t. Распределение оптимального фильтра совпадает с условным распределением $\mathrm{Law}(x_t \mid \mathcal{Y}_t)$ ([7, Lem 6.1.1]), но в силу линейности динамики и нормальности шума, распределение оптимального фильтра является гауссовским, и достаточно вычислять только его первый и второй моменты. Случай непрерывного фазового процесса и (произвольных) дискретных наблюдений был рассмотрен в [8] и для исследуемой постановки оптимальный фильтр может быть описан следующим образом.

Теорема 1 (Переформулировка [8, Th. 7.1])**.** *Предположим, что процесс N в* (6) *является процессом Пуассона. Оптимальный фильтр для системы* (1), (2) *является гауссовским процессом, для которого математическое ожидание $\widehat{x}_t = \mathsf{E}[x_t \mid \mathcal{Y}_t]$ удовлетворяет*

$$\mathrm{d}\widehat{x}_t = A\widehat{x}_t\mathrm{d}t + K_t(y_t - C\widehat{x}_t)\mathrm{d}N_t, \tag{7}$$

а матрица ковариации $P_t = \mathsf{E}[(x_t - \widehat{x}_t)(x_t - \widehat{x}_t)^\top \mid \sigma N_t]$ удовлетворяет

$$\mathrm{d}P_t = (AP_t + P_tA^\top + GG^\top)\mathrm{d}t - K_tCP_t\mathrm{d}N_t \tag{8}$$

где $K_t = P_tC^\top(CP_tC^\top + V_t)^{-1}$.

2.2.2. Фильтр взаимодействующих частиц. Представляет интерес поиск методов субоптимальной фильтрации и в частности фильтров взаимодействующих частиц. Как и в работе [2], фильтры построены для линейной системы (1)–(2). Основной результат работы представляет собой вывод уранений динамики взаимодействующих частиц и доказательство сходимости распределения частиц к распределению оптимального фильтра. Для введения взаимодействующих частиц необходим предварительный материал по уравнениеям МакКина–Власова.

3. Предварительные сведения по уравнениям МакКина–Власова

Согласно результатам [9] и применяя наши предположения, мы получаем следующее.

Определение 2. *s является решением стохастического дифференциального уравнения Маккина–Власова, начинающимся с s_0, если*

$$\mathrm{d}s_t = \sigma\left(s_t, \xi_t\right) \mathrm{d}B_t + b\left(s_t, \xi_t\right) \mathrm{d}t + \int_U g\left(s_{t-}, \xi_t, u\right) N(\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t) \tag{9}$$

где $\xi_t = \xi \circ s_t^{-1}$ – распределение s_t.

Интерес представляет закон s, называемый мерой Маккина, решающей соответствующую задачу мартингального типа. Несмотря на то, что неясно, как решать такие уравнения, можно изучать естественную аппроксимацию, представленную следующим образом, уравнениями для взаимодействующих частиц:

$$\mathrm{d}s_t^i = \sigma\left(s_t^i, \eta_t\right) \mathrm{d}B_t^i + b\left(s_t^i, \eta_t\right) \mathrm{d}t + \int_U g\left(s_{t-}^i, \eta_t, u\right) N^i(\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t) \tag{10}$$

где i-ая частица начинается с s_0^i, броуновские движения B^i независимы, и если K – количество частиц, мы определяем эмпирическую меру

$$\eta = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \delta_{s^i}.$$

Условия существования и единственности предоставлены в [9, Th. 2.1] как для системы частиц, так и для нелинейного уравнения Маккина-Власова. Нас интересует, что происходит, когда количество частиц K стремится к бесконечности. В [9, Th. 4.1] показано, что распределения частиц сходятся к мере МакКина в терминах Q-хаотичности (при условии сходимости мер в начальный момент), что эквивалентно тому, что последовательность эмпирических мер η_t слабо сходится к мере МакКина ξ_t (см. [10]).

4. Основной результат

Фильтры построеные с помощью облака взаимодействующих частиц обладают определенной структурой: динамика каждой частицы s^i повторяет динамику фазового процесса и включает поправку (разность между наблюдениями и предсказанием) с нулевым средним значением [2]. Однако, если заменить поправку на соответствующую разность $(y - Cs^i - Cv^i)$, то эмпирическое распределение не будет сходиться к оптимальному при увеличении числа частиц. Однако, приближение частицами остается возможным, если добавить зависимость коэффициентов от эмпирической ковариации. В примерах далее эта зависимость определяет матричные коэффициенты Ω и Ξ. Используем далее обозначение s^i для i-ой частицы, $\eta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} s^i$ для эмпирического среднего, $Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (s^i - \eta)(s^i - \eta)^\top$ для эмпирической ковариации и $L_t = Q_t C^\top (C Q_t C^\top + V_t)^{-1}$ в качестве соответствующей матрицы усиления фильтра. Тогда фильтры взаимодействующих частиц преобразуются следующим образом.

1. «Расширенный фильтр Калмана»

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}s_t := As_t\mathrm{d}t + G\mathrm{d}\omega_t + \Big(L_t y_t - L_t C s_t + \Omega_t \nu_t\Big)\mathrm{d}N_t,\\
&\Omega_{\tau_k}: \quad \Omega_{\tau_k} V_{\tau_k} \Omega_{\tau_k}^\top = Q_{\tau_k} C^\top L_{\tau_k}^\top - L_{\tau_k} C Q_{\tau_k} C^\top L_{\tau_k}^\top.
\end{aligned}
$$

2. «Упрощенный расширенный фильтр Калмана»

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}s_t := As_t\mathrm{d}t + G\mathrm{d}\omega_t + \Big(L_t y_t - L_t C \widehat{s}_t + \Xi_t(s_t - \widehat{s}_t)\Big)\mathrm{d}N_t,\\
&\Xi_{\tau_k}: \quad Q_{\tau_k}\Xi_{\tau_k}^\top + \Xi_{\tau_k} Q_{\tau_k} \Xi_{\tau_k}^\top + \Xi_{\tau_k} Q_{\tau_k} = -L_{\tau_k} C Q_{\tau_k}.
\end{aligned}
$$

3. «Транспортный фильтр»

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}s_t := As_t\mathrm{d}t + \Delta_t(s_t - \widehat{s}_t) + \Big(L_t y_t - L_t C \widehat{s}_t + \Xi_t(s_t - s_t)\Big)\mathrm{d}N_t,\\
&\Xi_{\tau_k}: \quad Q_{\tau_k}\Xi_{\tau_k}^\top + \Xi_{\tau_k} Q_{\tau_k} \Xi_{\tau_k}^\top + \Xi_{\tau_k} Q_{\tau_k} = -L_{\tau_k} C Q_{\tau_k},\\
&\Delta_t: \quad Q_t \Delta_t^\top + \Delta_t Q_t = GG^\top.
\end{aligned}
$$

Для доказательства сходимости показано, что системы уравнений для взаимодействующих частиц приближают соответствующие уравнения МакКина-Власова, которые в свою очередь обладают распределениями в точности совпадающими с распределением оптимального фильтра. Случай транспортного фильтра подробно рассмотрен в [3].

Список литературы

1. Hespanha J.P., Naghshtabrizi P., Xu Y. A survey of recent results in networked control systems // Proceedings of the IEEE. 2007. Vol. 95, No. 1. P. 138–162.
2. Bishop A.N., Del Moral P. On the mathematical theory of ensemble (linear-gaussian) Kalman–Bucy filtering // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2023. P. 1–69.
3. Yufereva O., Tanwani A. Transport Inspired Particle Filters with Poisson-Sampled Observations in Gaussian Setting // 2023 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Singapore, 2023. P. 7695–7700.
4. Brockett R. Stochastic control. Lecture Notes. Harvard University. 2009.
5. Jacod J., Shiryaev A. Limit theorems for stochastic processes. Springer Science & Business Media, 2013. Vol. 288.
6. Protter P. E. Stochastic differential equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. P. 249–361.
7. Øksendal B. Stochastic differential equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.
8. Jazwinski A.H. Stochastic processes and filtering theory. Courier Corporation, 2007.
9. Graham C. McKean-Vlasov Ito-Skorohod equations and nonlinear diffusions with discrete jump sets // Stochastic processes and their applications. 1992. Vol. 40, No. 1. P. 69–82.
10. Sznitman A.S. Topics in propagation of chaos // Lecture notes in mathematics. 1991. P. 165–251.