УДК 517.977.56

ОБ УПРАВЛЕНИИ НАБЛЮДЕНИЯМИ В ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ С ВЫПУКЛЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Б.И. Ананьев
Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Ковалевской, 16
E-mail: abi@imm.uran.ru

П.А. Юровских
Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского
Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Ковалевской, 16
E-mail: polina2104@list.ru

Ключевые слова: информационное множество, опорная функция, преобразование Лежандра, множители Лагранжа.

Аннотация: Рассмотрена задача управления наблюдениями для общей линейной многошаговой системы с возмущениями, ограниченными функционалом в виде суммы выпуклых функций. Для наблюдающей стороны найдены определяющие соотношения для информационных множеств, содержащих вектор ненаблюдаемых координат. Управляющая сторона стремится сформировать траекторию ненаблюдаемых векторов с закрепленными концами так, чтобы максимизировать размеры информационного множества в конце процесса. Для ограничений в виде суммы модулей эта задача рассмотрена на примере. Для квадратичных ограничений получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи для управляющей стороны.

1. Введение

Теория гарантированного оценивания динамических систем является важной часть теории управления. Основные подходы изложены в работах [7, 8]. Также применялись методы линейных матричных неравенств и полуопределенного программирования [6]. Для многошаговых линейных систем в основном рассматривались геометрические или квадратичные ограничения на возмущения. В настоящей работе предполагаются произвольные ограничения в виде суммы выпуклых функций, включающие указанные выше. Кроме того, система имеет более общий вид:

$$
\begin{gathered}
y_k = C_k^y y_{k-1} + A_k^y z_{k-1} + B_k^y v_k, \quad k \in 1:N, \quad y_k \in \mathbb{R}^{n-m}, \\
z_k = A_k^z z_{k-1} + C_k^z y_{k-1} + B_k^z v_k, \quad z_k \in \mathbb{R}^m, \quad m \leqslant n, \quad v_k \in \mathbb{R}^q, \\
F_0(z_0) + \sum_{k \in 1:N} F_k(v_k) \leqslant 1,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где выпуклые и замкнутые функции $F_k \geqslant 0$, $k \in 0 : N$, таковы, что $F_0(z) \to +\infty$ и $F_k(v) \to +\infty$, если $|z| \to +\infty$, $|v| \to +\infty$. Таким образом, множества уровня $\mathrm{lev}_{\leqslant 1} F_k$ компактны. Кроме того, предполагается, что множества $\mathrm{lev}_{=0} F_k \neq \varnothing$. Обозначения множеств уровня взяты из [9]. В системе (1) векторы y_k – наблюдаемые, а z_k – ненаблюдаемые. Мы будем рассматривать задачу управления наблюдениями для системы (1) в постановке, близкой к [1]. Подобные задачи изучались для систем со случайными возмущениями в [4].

2. Постановка задач

По отношению к системе (1) в задаче присутствуют два лица: наблюдатель и контроллер. Наблюдатель, пытаясь определить векторы $z_{1:k}$, предполагает, что имеются неизвестные ему набор векторов $v^*_{1:N}$ и начальное состояние z^*_0, удовлетворяющие ограничениям в (1) и порождающие сигнал $y_{1:N}$. Решая эту задачу, он строит информационные множества согласно определению.

Определение 1. *Информационным множеством (ИМ) $Z_k(y)$ называется совокупность векторов z_k, совместимых с набором $y_{1:k}$, т.е. таких, что для них найдутся векторы $v_{1:k}$ и z_0, удовлетворяющие ограничениям в (1), порождающие сигнал $y_{1:k}$ и траекторию $z_{1:k}$ ненаблюдаемых координат с конечной точкой z_k.*

По построению $Z_k(y) \neq \varnothing$, $\forall k \in 1 : N$, поскольку $z^*_k \in Z_k(y)$.

Контроллер преследует собственные цели, неизвестные наблюдателю. Он должен перевести систему из состояния z_0 в состояние z_N так, чтобы максимизировать размеры ИМ $Z_N(y)$, т.е. затруднить проблему для наблюдателя в последний момент N. Под размерами будем понимать диаметр ИМ, чебышевский радиус или иные характеристики.

2.1. Построение информационных множеств

Рекуррентно определяем множества

$$
\begin{gathered}
G_k(y) = \{[z_{k-1}; v_k] : y_k = C^y_k y_{k-1} + A^y_k z_{k-1} + B^y_k v_k,\ V_{k-1}(y, z_{k-1}) + \\
+ F_k(v_k) \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^{m+q}, \\
\mathcal{D}_k(y) = \{z_k : z_k = A^z_k z_{k-1} + C^z_k y_{k-1} + B^z_k v_k,\ [z_{k-1}; v_k] \in G_k(y)\} \subset \mathbb{R}^m,
\end{gathered} \tag{2}
$$

где $\mathcal{D}_k(y)$ – область достижимости на k-м шаге. Функция V_k в (2) определяется как

$$
\begin{gathered}
V_k(y, z_k) = \inf \big\{ V_{k-1}(y, z_{k-1}) + F_k(v_k) : z_k = A^z_k z_{k-1} + C^z_k y_{k-1} + B^z_k v_k, \\
y_k = C^y_k y_{k-1} + A^y_k z_{k-1} + B^y_k v_k \big\}, \quad V_0(y, z_0) = F_0(z_0),
\end{gathered}
$$

где нижняя грань берется по всем парам $[z_{k-1}; v_k]$ при зафиксированных $y_{0:k}$. Если для данного z_k такой пары не найдется, полагаем $V_k(y, z_k) = +\infty$. Функции $V_k(y, z_k)$ – неотрицательные выпуклые и замкнутые по z_k. Берем преобразование Лежандра этих функций (см. [5]). Оно имеет вид

$$
\begin{gathered}
V^*_k(y, z^*_k) = \sup \{ l' z^*_k - V_k(y, l) : l \in \mathbb{R}^m \} = \\
= \sup \big\{ \left(A^z_k z_{k-1} + C^z_k y_{k-1} + B^z_k v_k\right)' z^*_k - V_{k-1}(y, z_{k-1}) - F_k(v_k) : [z_{k-1}; v_k], \\
y_k = C^y_k y_{k-1} + A^y_k z_{k-1} + B^y_k v_k \big\} = \\
= \left([A^z_k\ B^z_k] Y_k + C^z_k y_{k-1}\right)' z^*_k + \mathbf{F}^*_k(P_k [A^z_k\ B^z_k]' z^*_k),
\end{gathered}
$$

где

$$\mathbf{F}_k(a,b) = V_{k-1}(y, [I_m\ O_{m\times q}](Y_k + P_k[a;b])) + F_k\left([O_{q\times m}\ I_q](Y_k + P_k[a;b])\right),$$
$$[z_{k-1}; v_k] = Y_k + P_k[a;b], \quad P_k = I_{m+q} - [A_k^y\ B_k^y]^+[A_k^y\ B_k^y],$$
$$Y_k = [A_k^y\ B_k^y]^+(y_k - C_k^y y_{k-1}).$$

Поясним обозначения. Если A, B – матрицы, то $[A\ B]$, $[A;B]$ их горизонтальная и вертикальная конкатенации, соответственно. Единичная матрица $I_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$; нулевая матрица $O_{m\times q} \in \mathbb{R}^{m\times q}$; A^+ – псевдообратная матрица для A. Напомним некоторые понятия. Символом $\delta_{\mathcal{D}}$ обозначается индикаторная функция множества $\mathcal{D}$, которая определяется как $\delta_{\mathcal{D}}(z) = 0$, если $z \in \mathcal{D}$, $\delta_{\mathcal{D}}(z) = +\infty$, если $z \notin \mathcal{D}$; $\rho_{\mathcal{D}}$ – опорная функция множества $\mathcal{D}$. Для выпуклого компакта $\mathcal{D}$ эти функции взаимно сопряжены: $\delta^*_{\mathcal{D}} = \rho_{\mathcal{D}}$, $\rho^*_{\mathcal{D}} = \delta_{\mathcal{D}}$. Определяются следующие сопутствующие функции для выпуклой функции f: $(f\lambda)(x) = \begin{cases}\lambda f(\lambda^{-1}x),\ \lambda > 0,\\ \delta_0(x),\ \lambda = 0\end{cases}$; $g_f(x) = \inf\left\{(f\lambda)(x) : \lambda \geqslant 0\right\}$. Функция g_f называется положительно однородной функцией, порожденной f. Известен результат (см. [5, теор. 27.1]) $\rho_{\mathrm{lev}_{\leqslant r} f} = \mathrm{cl}\, g_{f^*+r}$, где cl – замыкание соответствующей функции. Для всякой выпуклой функции f имеем соотношение для надграфиков: $\mathrm{epi}\,(\mathrm{cl}\, f) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{epi}\, f)$. В нашем случае опорная функция множества $\mathcal{D}_k(y)$ определится соотношением

$$\rho_{\mathrm{lev}_{\leqslant 1} V_k(y,\cdot)} = \rho_{\mathcal{D}_k(y)} = g_{V_k^*(y,\cdot)+1},$$

где замыкание опущено ввиду свойств функций F_k. Аналогично [2] доказывается теорема.

Теорема 1. *Множества* $\mathcal{D}_k(y) = \{z_k : V_k(y, z_k) \leqslant 1\}$ *в* (2) *являются непустыми, замкнутыми и выпуклыми компактами, совпадающими с ИМ* $Z_k(y)$ *для системы* (1).

3. Задача контроллера

Для ограничений

$$|z_0|_1 + \sum_{k\in 1:N} |v_k|_1 \leqslant 1,$$

где $|z|_1 = \sum_{k\in 1:m} |z^i|$, $|v|_1 = \sum_{k\in 1:q} |v^i|$, задача контроллера рассмотрена на конкретном примере. Для ограничений

$$|z_0|^2 + \sum_{k\in 1:N} |v_k|^2 \leqslant 1, \tag{3}$$

где $|v|$ – евклидова норма, получены более продвинутые результаты. А именно, удается явно найти опорную функцию

$$\rho(l|\mathcal{D}_k(y)) = l'\hat{z}_k + \sqrt{\Big(1 - \sum_{i\in 1:k} |Y_i|^2\Big) l'\hat{P}_k l}, \quad l \in \mathbb{R}^m,$$
$$\hat{z}_k = C_k^z y_{k-1} + A_k^z \hat{z}_{k-1} + \mathbb{P}_k^z Y_k, \quad \hat{P}_k = \mathbb{P}_k^z P_k \mathbb{P}_k^{z\prime}, \quad \mathbb{P}_k^z = [A_k^z \hat{P}_{k-1}^{1/2}\ B_k^z], \tag{4}$$
$$Y_k = \mathbb{P}_k^{y+}\left(y_k - C_k^y y_{k-1} - A_k^y \hat{z}_{k-1}\right), \quad \mathbb{P}_k^y = [A_k^y \hat{P}_{k-1}^{1/2}\ B_k^y].$$

Здесь P_k – проектор пространства $\mathbb{R}^{m+q}$ на $\ker \mathbb{P}_k^y$; $\hat{P}_0 = I_m$, $\hat{z}_0 = 0$. Отметим, что уравнения (4) определяют эллипсоид, возможно вырожденный. Поскольку диаметр, чебышевский радиус, а также и объем (для эллипсоида) непосредственно зависят от выражения под корнем в (4), то приходим к следующей задаче минимизации для контроллера:

$$J(z_0, y_0, \mathbf{v}) = \sum_{k \in 1:N} |\mathbf{P}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}_k v_k|^2 \to \min, \quad \mathbf{v} = v_{1:N}, \tag{5}$$

где $\mathbf{P}_k = [\mathbb{P}_k^{y+} A_k^y \, O_{(m+q)\times m} \, O_{(m+q)\times q}]$, $\mathbf{b}_k = \mathbb{P}_k^{y+} B_k^y$; векторы $\mathbf{x}_k = [e_k; z_k; y_k]$, $e_k = z_k - \hat{z}_k$, подчиняются уравнению

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k v_k, \quad e_0 = z_0, \quad \mathbf{A}_k = [A_k^z - \mathbb{P}_k^z \mathbb{P}_k^{y+} A_k^y \, O_m \, O_{m\times(n-m)};$$
$$O_m \, A_k^z \, C_k^z; O_{(n-m)\times m} \, A_k^y \, C_k^y], \quad \mathbf{B}_k = [B_k^z - \mathbb{P}_k^z \mathbb{P}_k^{y+} B_k^y; B_k^z; B_k^y].$$

Отметим, что, если положения z_0 и z_N не фиксированы, то задача (5) имеет очевидное нулевое решение: $z_0 = y_0 = 0$, $v_k = 0$. Если фиксировано только начальное состояние z_0, то задача (5) допускает решение методом динамического программирования. При зафиксированных концах траектории $z_{0:N}$ составляем функцию Лагранжа $\mathbf{L} = J(z_0, y_0, \mathbf{v}) + \sum_{k \in 1:N} h_k' \left(\mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k v_k - \mathbf{x}_k\right) + \gamma'(z_N - \xi) + {}$ $+ \lambda\Big(\sum_{k \in 1:N} |v_k|^2 + |z_0|^2 - 1\Big)$ где h_k, γ и $\lambda \geqslant 0$ – множители Лагранжа. Необходимые условия оптимальности приводят к соотношениям:

$$\begin{gathered} h_{k-1} = \mathbf{A}_k' h_k + 2\mathbf{P}_k'(\mathbf{P}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}_k v_k), \quad k \in 2:N; \\ \mathbf{B}_k' h_k + 2\mathbf{b}_k'(\mathbf{P}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}_k v_k) + 2\lambda v_k = 0, \quad k \in 1:N; \\ h_N = [O_m; I_m; O_{(n-m)\times m}]\gamma, \quad h_1'[O_{m\times(n-m)}; C_1^z; C_1^y] = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Теорема 2. *Если вектор $z_N = \xi$ принадлежит области достижимости уравнения из (1) в момент N при данном начальном условии z_0, то существует оптимальный набор $\hat{\mathbf{v}}$ возмущений, минимизирующий функционал в (5) и, следовательно, максимизирующий диаметр или объем ИМ $Z_N(y)$ при ограничениях (3) в силу их компактности. Если существует такой допустимый набор $\bar{\mathbf{v}}$, что в (3) выполняется строгое неравенство (условие Слейтера), то найдутся множители Лагранжа h_k, γ и $\lambda \geqslant 0$, не все равные нулю, и оптимальный набор $\hat{\mathbf{v}}$ в задаче (5), удовлетворяющие соотношениям (6), причем выполняется условие дополняющей нежесткости $\lambda\big(|z_0|^2 + \sum_{k \in 1:N} |\hat{v}_k|^2 - 1\big) = 0$ и $\hat{v}_k = -(\lambda I_q + \mathbf{b}_k' \mathbf{b}_k)^+ (\mathbf{b}_k' \mathbf{P}_k x_{k-1} + \mathbf{B}_k' h_k / 2)$. При условиях Слейтера соотношения (6) являются также и достаточными.*

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из теоремы Куна-Таккера [3, теор. 2.2.2]. Один из способов разрешения соотношений (6) состоит в использовании подстановки $h_k = U_k \mathbf{x}_k$, где симметричная матрица U_k служит решением системы уравнений типа Риккати:

$$U_{k-1} = \mathbf{A}_k' U_k \mathbf{A}_k + (\mathbf{A}_k' U_k \mathbf{B}_k + 2\mathbf{P}_k' \mathbf{b}_k)\mathbf{V}_k,$$
$$\mathbf{V}_k = -(\mathbf{B}_k' U_k \mathbf{B}_k + 2\mathbf{b}_k' \mathbf{b}_k + 2\lambda I_q)^+ (\mathbf{B}_k' U_k \mathbf{A}_k + 2\mathbf{b}_k' \mathbf{P}_k).$$

При этом оптимальный набор набор возмущений в задаче (5) выражается обратной связью $\hat{v}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{x}_{k-1}$.

В качестве иллюстрации теоремы 2 рассмотрено численное решение задачи контроллера для системы с двумерным вектором z_k и скалярным сигналом y_k.

4. Заключение

• Рассмотрена специальная задача управления наблюдениями для общей линейной многошаговой системы с возмущениями, ограниченными функционалом в виде суммы выпуклых функций.

• Получены определяющие соотношения для нахождения информационных множеств, содержащих истинный вектор ненаблюдаемых координат.

• Сформулирована проблема максимизации размеров информационного множества в конечный момент. Для ограничений в виде суммы модулей эта проблема рассмотрена на примере.

• Для квадратичных ограничений получены необходимые и достаточные условия оптимальности возмущений в проблеме максимизации. Результат проиллюстрирован на численном примере.

Список литературы

1. Ананьев Б.И., Ширяев В.И. О выборе наихудших сигналов в многошаговых задачах гарантированного оценивания // Сб. «Динамические задачи оценивания в условиях неопределенности». Ред. М.И. Гусев и Т.Ф. Филиппова. Свердловск, Издательство УНЦ: 1989. С. 11-20.
2. Ананьев Б.И., Юровских П.А. Общая задача гарантированного оценивания для многошаговых систем // Изв. Иркутского гос. университета. Сер. Математика. 2023. Т. 45. С. 37–53.
3. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: ЛЕНАНД, 2023. 204 с.
4. Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А., Серебровский А.П. Управление наблюдениями в автоматических системах. М.: Наука, 1986. 218 с.
5. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
6. Boyd S. et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
7. Chernousko F.L. State Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.
8. Kurzhanski A., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. SCFA. Boston: Birkhäuser, 2014. 445 p.
9. Rockafellar R.T., Wets R. J-B. Variational Analysis. V. 317, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics,Berlin, Heidelberg: Springer, 1998. 734 p.