УДК 517.977

# ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПОЭТАПНО МЕНЯЮЩИХСЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА

**В.Р. Барсегян**
*Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет*
Армения, 0019, Ереван, пр. Баграмяна, 24
E-mail: barseghyan@sci.am

**Ключевые слова:** линейные системы, системы переменной структуры, управляемость, динамический регулятор.

**Аннотация:** Рассматривается задача управляемости поэтапно меняющихся линейных динамических систем с помощью динамического регулятора. Сформулирована вполне управляемость поэтапно меняющихся линейных систем с помощью динамического регулятора. Получены критерии вполне управляемости поэтапно меняющихся линейных нестационарных и стационарных систем с помощью динамического регулятора, которые выражены непосредственно через параметры исходных систем.

## 1. Введение

Теория управления, являясь одной из важнейших наук, дает основу для исследования и проектирования автоматизированных систем во многих областях деятельности человека. Целью проектирования систем автоматического управления является построение управляющего устройства обратной связи (регулятора), с помощью которого динамической системе передается желаемое движение. С точки зрения легко реализуемости обратной связи представляет интерес возможность построения управления динамической системой с помощью функций из желаемого класса.

Исследованию задач построения динамических регуляторов посвящены, в частности, работы [1-3]. В этих работах рассматривается задача управляемости линейной динамической системы с помощью дифференциально-алгебраического регулятора, который представляет собой линейную дескрипторную систему. Получен критерий управляемости динамическим регулятором, который выражается через параметры системы и динамического регулятора.

Исследование многих прикладных задач о процессах управления и наблюдения сводится к динамическим системам, структурные параметры которых на разных этапах функционирования различные, в частности, к системам переменной структуры (поэтапно меняющимся системам). Как в обычных задачах управления и наблюдения [3, 4], так и в задачах управления и наблюдения поэтапно меняющимися системами принципиальными являются вопросы управляемости и наблюдаемости. Они играют важную роль в синтезе этих систем [5-10]. Некоторые вопросы управляемости и наблюдаемости систем переменной структуры (поэтапно меняющихся) исследованы, в частности, в работах [6-10].

В данной работе рассматриваются вопросы управляемости поэтапно меняющихся линейных систем с помощью динамического регулятора. Сформулирована вполне управляемость поэтапно меняющихся линейных систем с помощью динамического регулятора. Получены условия вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы с помощью динамического регулятора и эти условия явно выражены непосредственно через исходные параметры системы.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается поэтапно меняющимися линейными нестационарными дифференциальными уравнениями

(1) $$\dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x + B_1(t)u & \text{при } t \in [t_0, t_1), \\ A_2(t)x + B_2(t)u & \text{при } t \in [t_1, t_2), \\ \quad . \quad . \quad . \\ A_m(t)x + B_m(t)u & \text{при } t \in [t_{m-1}, T], \end{cases}$$

с начальным условием

(2) $$x(t_0) = x_0,$$

где $x(t) \in R^n$, $x(t)$- фазовый вектор системы; $A_k(t)$, $B_k(t)$ $(k = 1, \dots, m)$ матрицы параметров системы (модели объекта), $u(t)$ управляющее воздействие, соответственно, с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B_k(t) - (n \times r)$, $u(t) - (r \times 1)$. В общем случае будем предполагать, что элементы матриц $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбца $u(t)$ являются непрерывными функциями. Предполагается, что в заданные промежуточные моменты времени $t_k$

$$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = T$$

конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, то есть в моменты времени $t_k$

(3) $$x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k), k = 1, \dots, m - 1.$$

Описанная математическая модель характеризуется как система с переменной структурой (т.е. поэтапно меняющаяся система).

**Определение 1.** Система (1), для которой конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если для любых начальных $x(t_0) = x_0$ и конечных $x(T) = x_T$ состояний можно указать управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, такое, что решение $x(t)$, начиная из состояния $x(t_0)$ в момент времени $t = T$ удовлетворяет условию $x(T) = x_T$.

Рассматривается вопрос о возможности управления системой с помощью технически легко реализуемой функции (из известного класса). Поэтому пусть управляющая функция $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, имеет вид

(4) $$u(t) = Cy(t),$$

где $y(t)$ строится по выходному сигналу следующей дифференциальной системы

(5) $$\dot{y}(t) = Dy(t), y(t_0) = y_0,$$

которую назовем дифференциально-динамическим регулятором или просто динамическим регулятором поэтапно меняющейся системы (1). Здесь $C - (r \times n)$ и $D - (n \times n)$ - мерные заданные матрицы.

**Определение 2.** Поэтапно меняющаяся система (1), для которой конец движения предыдущего этапа является началом следующего этапа, называется вполне управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$ динамическим регулятором (4), (5), если для любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) найдется начальное состояние $y(t_0) = y_0$ системы (5), при котором решение системы (1), соответствующее управлению $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ из (4), в конечный момент времени $t = T$ удовлетворяет условию $x(T) = x_T$. Требуется найти условия, при которых движение объекта, описываемого системой (1)-(3), будет вполне управляемым динамическим регулятором (4), (5) на отрезке времени $[t_0, T]$.

# 3. Об основных результатах

Для получения основных результатов используются теоремы о представлении решения и о вполне управляемости поэтапно меняющихся линейных систем (1) [6, 7, 10].

**Теорема 1.** Для любых начальных значений $x(t_0) = x_0$ и допустимых управлений $u(t)$ существует решение $x(t)$ системы (1), удовлетворяющее условиям (3), $k = 1, \dots, m-1$ и для $t \in [t_{k-1}, t_k)$ представляется в виде

$$x(t) = V(t, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j\,[t_j, \tau]u(\tau)d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t} H_k[t, \tau]\,u(\tau)d\tau,$$

где

$$V(t, t_j) = X_k[t, t_{k-1}]\,V(t_{k-1}, t_j), V(t_k, t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}],$$

$(k = 1, \dots, m;\ j = 0, \dots, k-1)$, $H_k[t, \tau] = X_k[t, \tau]B_k$, а через $X_k[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части $k$–ого уравнения системы (1). Отметим, что согласно введенному обозначению $V(t_k, t_{k-1}) = X_k[t_k, t_{k-1}]$ при $j = k-1$, а $V(t_k, t_k) = E$ при $j = k$.

**Теорема 2.** Поэтапно меняющаяся система (1) с условием (3) вполне управляема на отрезке времени $[t_0, T]$, тогда и только тогда, когда интегральная матрица

$$Q(t_0, \dots., T) = \int_{t_0}^{T} \left(\sum_{j=1}^{m} V(\mathrm{T}, t_j)\,\overline{H}_j[t_j, t]\right)\left(\sum_{j=1}^{m} V(\mathrm{T}, t_j)\,\overline{H}_j[t_j, t]\right)^T dt$$

положительно определена. Здесь введены следующие обозначения:

$$\overline{H}_1[t_1, t] = \begin{cases} H_1[t_1, t] & \text{при } t_0 \le t < t_1, \\ 0 & \text{при } t_1 \le t \le T, \end{cases} \quad \overline{H}_m[t_m, t] = \begin{cases} 0 & \text{при } t_0 \le t < t_{m-1}, \\ H_m[t_m, t] & \text{при } t_{m-1} \le t \le T, \end{cases}$$

$$\overline{H}_k[t_k, t] = \begin{cases} 0 & \text{при } t_0 \le t < t_{k-1}, \\ H_k[t_k, t] & \text{при } t_{k-1} \le t < t_k, k = 2, \dots, m-1. \\ 0 & \text{при } t_k \le t \le T, \end{cases}$$

Из (4) и (5) имеем

(6) $$u(t) = Ce^{D(t-t_0)}y(t_0).$$

Если управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ обеспечивает переход движения системы (1) к моменту времени $t = T$ в положение $x(T) = x_T$, то при $t = t_m = T$ (при $k = m$) на основе выше приведенных теорем получим

(7) $$M(t_0, t_1, \dots, T)y(t_0) = x(T) - V_m(T, t_0)x(t_0),$$

где

$$M(t_0, t_1, \dots, T) = \sum_{j=1}^{m} V_m(T, t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, \tau]Ce^{D\,\tau}d\tau\, e^{-D\,t_0}.$$

Матрица $M(t_0, t_1, \dots, T)$ имеет размерность $(n \times n)$, (7) – это система $n$ линейных алгебраических уравнений относительно $n$ неизвестных компонент вектора $y(t_0)$ с правой частью $x(T) - V_m(T, t_0)x(t_0)$. Отметим, что для любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) правая часть системы (7) принимает любое значение. Поэтому из условий существования решений системы линейных неоднородных алгебраических уравнений (7) следует критерий вполне управляемости нестационарной системы (1) динамическим регулятором (4), (5). Следовательно, условие вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной нестационарной системы с помощью динамического регулятора выражается следующей теоремой.

**Теорема 3.** Система (1)-(3) вполне управляема динамическим регулятором (4), (5) тогда и только тогда, когда матрица $M(t_0, t_1, \ldots, T)$ не особая.

Суждение об условии управляемости поэтапно меняющихся линейных систем (1) с динамическим регулятором (4), (5) целесообразно иметь, опираясь лишь на исходные данные задачи. Поэтому желательно иметь условия, позволяющие судить об управляемости (1) с помощью динамического регулятора (4), (5) по элементам матрицы $A_k$, $B_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, $C$ и $D$.

Таким образом, требуется найти условия вполне управляемости поэтапно меняющихся линейных систем (1)-(3) с помощью динамического регулятора (4), (5), выраженные непосредственно через матрицы $A_k$, $B_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, $C$ и $D$.

Рассмотрим случай, когда система (1) стационарна, т.е.

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x + B_1 u, & t \in [t_0, t_1), \\ A_2 x + B_2 u, & t \in [t_1, t_2), \\ \vdots & \\ A_m x + B_m u, & t \in [t_{m-1}, T]. \end{cases} \tag{8}$$

Для вполне управляемости системы (8) с условием (3) на отрезке времени $t_0 \le t \le T$ справедлива следующая теорема [6].

**Теорема 4.** Линейная стационарная система (1) вполне управляема на отрезке времени $t_0 \le t \le T$, тогда и только тогда, когда матрица

$$K = \{B_1, A_1 B_1, \ldots, A_1^{n-1} B_1, \ldots, B_m, A_m B_m, \ldots, A_m^{n-1} B_m\}$$

имеет ранг равный $n$.

Условия вполне управляемости поэтапно меняющейся линейной стационарной системы с помощью динамического регулятора выражается следующей теоремой.

**Теорема 5.** Система (8) с условием (3) вполне управляема динамическим регулятором (4), (5), тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$rank\left(\sum_{j=1}^{m} C_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{-A_j \tau} B_j C e^{D\tau} d\tau\right) = n. \tag{9}$$

Таким образом, при выполнении условий (9) для любого начального состояния $x(0) = x_0$ системы (8) найдется начальное состояние $y(0) = y_0$ регулятора (5), при котором решение системы (8), соответствующее управлению $u(t)$, $t \in [t_0, T]$ из (4), в конечный момент времени $t = T$ будет удовлетворять условию $x(T) = x_T$.

## Список литературы


1. Игнатенко В.В., Крахотко В.В., Размыслович Г.П. К управляемости линейных систем дескрипторными регуляторами // Труды БГТУ. 2017. Сер. 3. № 1. С. 5-7.
2. Размыслович Г.П., Крахотко В.В. Управляемость линейных систем со многими запаздываниями по управлению с помощью дифференциальных регуляторов // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018. № 3. С. 82–85.
3. Игнатенко В.В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора // Вестник БГУ. 1976. Сер. 1. С. 56–58.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением, М.: Наука, 1968.
5. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С.В. Емельянова. М.: Наука, 1970.

6. Барсегян В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.
7. Barseghyan V.R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure // Proceedings of 2016 International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) STAB ’2016.
8. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav Journal of Operations Resarch. 2012. Vol. 22, No. 1. P. 31-39.
9. Барсегян В.Р., Барсегян Т.В. Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 4. С. 3-15.
10. Барсегян В.Р. Управляемость поэтапно меняющихся линейных нестационарных динамических систем // Доклады НАН Армении, 2018. Т. 118, № 3. С. 237-245.