УДК 517.977.56

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ ЛИУ

Б.И. Ананьев

Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского

Россия, 620108, Екатеринбург, ул. Ковалевской, 16

E-mail: abi@imm.uran.ru

Ключевые слова: область достижимости, теория неопределенности, многошаговая матричная задача.

Аннотация: В рамках теории неопределенности Лиу рассмотрена задача оценивания области достижимости дискретной системы, содержащей неизвестные параметры, стесненные заданными ограничениями. Исходная задача с неопределенными помехами сведена к детерминированной многошаговой задаче с матрицами. Получены необходимые и достаточные условия конечности минимума функционала, задающего ограничения в детерминированной задаче. Рассмотрен пример.

1. Введение

Теория неопределенности Баодинга Лиу получила развитие в последнее десятилетие [5–7]. Элементы теории применяются в теории управления, математическом программировании, финансовой математике, робототехнике и других направлениях прикладной математики. Теория Лиу является лишь одним из возможных подходов для описания и учета неопределенности. К таким подходам можно отнести различные варианты теории вероятностей, теорию нечетких множеств Заде, интервальный анализ, теорию хаоса. Активно развивается теория возможности как альтернативы вероятности в работе [2]. Широкую известность приобрела теория гарантированного оценивания [4], основанная на теоретико-множественном описании неопределенности.

В настоящей работе рассматривается задача оценивания дискретных по времени неопределенных процессов Лиу, описываемых линейными уравнениями

$$x_k = (A_k + B_k K_k)x_{k-1}(1 + \lambda_k \xi_k), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \quad k \in 1:m, \tag{1}$$

где $|\lambda_k| \leqslant 1$ – числа. Отметим, что задача оценивания детерминированных систем с неопределенной матрицей изучалась в [3]. В (1) присутствуют два вида неопределенностей:

• детерминированные матрицы $K_k \in \mathbb{R}^{q\times n}$, подчиненные вместе с x_0 ограничениям

$$J(x_0, \mathbb{K}) = \sum_{k\in 1:m} Ex'_{k-1}(K'_k R_k K_k + Q_k)x_{k-1} \leqslant 1, \quad x_0 \in \mathbf{X}_0, \tag{2}$$

где E – математическое ожидание, $\mathbb{K} = K_{1:m}$; R_k и Q_k – заданные симметрические матрицы, соответствующих размерностей; $\mathbf{X}_0 \ni 0$ – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$;

• обыкновенные равномерно распределенные на $[-1,1]$ и независимые между собой неопределенные величины (НВ) ξ_k, заданные на N-пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, N)$, где $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, N – функция неопределенности множества (см. определения в [5] или [1]).

Приведем необходимые факты из теории Лиу. Соотношения (1), (2) включают шумы ξ_k. Функция распределения (ФР) $F_\xi(x)$ для НВ ξ определяется так же, как в теории вероятностей: $F_\xi(x) = N(\xi \leqslant x)$. Независимость для двух НВ ξ_1, ξ_2 понимается как $N(A_1^* \bigcap A_2^*) = N(A_1^*) \bigwedge N(A_2^*)$, где $a \bigwedge b = \min(a,b)$ и A_i^* – любые множества из совокупности $\{A_i, \Omega \setminus A_i, \Omega\}$, $A_i = \xi_i^{-1}(B_i)$, $B_i \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ – σ-алгебра на $\mathbb{R}$. Независимость обобщается на произвольное множество индексов i. Математическое ожидание (МО) E для НВ ξ определяется как $E\xi = \int_0^\infty N(\xi \geqslant x)dx - \int_{-\infty}^0 N(\xi \leqslant x)dx$, если хотя бы один интеграл конечен. Всякая ФР F обладает тремя свойствами: (1) $F \not\equiv 0$, (2) $F \not\equiv 1$, (3) из условия $F(x) = 1\ \forall x > x^*$ следует $F(x^*) = 1$. Верно и обратное: если F обладает свойствами (1)–(2), то она является ФР для некоторой НВ. Обыкновенные НВ связаны со своей F следующим образом. Пусть $\mathcal{L}$ – семейство всевозможных множеств вида $\{(-\infty, x], (x, \infty), \varnothing, R\}$ и $N_\xi = N\xi^{-1}$ – индуцированная неопределенность на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Тогда $N_\xi((-\infty, x]) = F(x)$, $N_\xi((x,\infty)) = 1 - F(x)$ и

$$N_\xi(B) = \begin{cases} \inf\limits_{B \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} N_\xi(A_i), & \text{если } \inf\limits_{B \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} N_\xi(A_i) < 0.5; \\ 1 - \inf\limits_{B^c \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} N_\xi(A_i), & \text{если } \inf\limits_{B^c \subset \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i} \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} N_\xi(A_i) < 0.5; \\ 0.5, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

для $B \in \mathcal{B}$.

Равномерно распределенная на $[-1,1]$ обыкновенная НВ ξ отличается от соответствующей случайной величины в теории вероятностей, поскольку $N(\xi = x) = N_\xi(x) = F(x) \bigwedge (1 - F(x) \neq 0$ для $x \in (-1,1)$.

2. Постановка задачи

Определение 1. *Областью достижимости (ОД) $\mathcal{X}_m$ назовем совокупность НВ $\eta \in \mathbb{R}^n$, для которых $\exists$ набор $(x_0, \mathbb{K})$, удовлетворяющий ограничениям (2) и такой, что $x_m = \eta$ при выполнении уравнений (1). Равенства рассматриваются N-почти всюду.*

Задача заключается в нахождении ОД $\mathcal{X}_m$. Пусть $V_m(\eta) = \min\{J(x_0, \mathbb{K}) : x_m = \eta,\ x_0 \in \mathbf{X}_0,\ K_k \in \mathbb{R}^{q\times n}\}$. Тогда $\mathcal{X}_m = \{\eta : V_m(\eta) \leqslant 1\}$.

Заметим, что всегда $0 \in \mathcal{X}_m$. Далее те НВ η, для которых $V_m(\eta) = -\infty$, исключаются из рассмотрения.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Задача минимизации функционала $J(x_0, \mathbb{K})$ в (2) эквивалентна детерминированной задаче:*

$$\begin{gathered}\mathcal{V}_m(X_m) = \min\{\mathbf{J}(x_0, \mathbb{K}) : X_m = \Xi = E\eta\eta',\, x_0 \in \mathbf{X}_0,\, K_k \in \mathbb{R}^{q\times n}\},\\ \mathbf{J}(x_0, \mathbb{K}) = \sum_{k\in 1:m} tr((K_k' R_k K_k + Q_k)X_{k-1}),\end{gathered} \tag{3}$$

где tr – след матрицы, при рекуррентных условиях связи

$$\begin{gathered}X_k = (1 + \lambda_k^2/3)U_k(K_k, X_{k-1}), \quad X_0 = x_0x_0',\\ U_k(K, X) = (A_k + B_kK)X(A_k + B_kK)'.\end{gathered} \tag{4}$$

Функционалы J и $\mathbf{J}$ совпадают. Следовательно, $\mathcal{V}_m(\Xi) = V_m(\eta)$, если минимум конечен и достигается.

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}X_k = Ex_kx_k' = E((A_k + B_kK_k)(1 + \lambda_k\xi_k)x_{k-1}x_{k-1}'(A_k + B_kK_k)'(1+\\ +\lambda_k\xi_k)) = U_k + E(2\lambda_kU_k\xi_k + \lambda_k^2U_k\xi_k^2).\end{gathered}$$

Здесь $U_k = U_k(K_k, X_{k-1})$ для сокращения. Далее, $E(2\lambda_kU_k\xi_k + \lambda_k^2U_k\xi_k^2) = \lambda_k^2U_kE(2\xi_k/\lambda_k + \xi_k^2) = \lambda_k^2U_k/3$. Здесь использованы следующие факты: $E\xi_k = 0$, $E(2\xi_k/\lambda_k + \xi_k^2) = 1/3$, $aE\xi + bE\eta = E(a\xi + b\eta)$ и $E\xi\eta = E\xi E\eta$ для независимых НВ ξ, η. Заметим, что свойства $R_k \geqslant 0$ и $Q \geqslant 0$ при доказательстве не используются. При выполнении этих свойств имеем $V_m(\eta) = \mathcal{V}_m(X_m) \geqslant 0$.

Следствие 1. *ОД $\mathcal{X}_m = \{\eta : \mathcal{V}_m(E\eta\eta') \leqslant 1\}$.*

Для исследования задачи (3) в формуле (4) полагаем $\lambda_k = 0$. Иначе переходим к матрицам $\bar{A}_k = \sqrt{1 + \lambda_k^2/3}A_k$, $\bar{B}_k = \sqrt{1 + \lambda_k^2/3}B_k$. Составляем функцию Лагранжа

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}(x_0, \mathbb{K}) + \sum_{k\in 1:m} tr(H_k(U_k(K_k, X_{k-1}) - X_k)) + tr(\Gamma(X_m - \Xi)), \quad X_0 = x_0x_0',$$

где симметрические матрицы $H_{1:m}$ и Γ – множители Лагранжа. На первом этапе фиксируем x_0. Необходимые условия оптимальности:

$$\begin{gathered}\partial\mathbf{L}/\partial K_k = 2R_kK_kX_{k-1} + 2B_k'H_kA_kX_{k-1} + 2B_k'H_kB_kK_kX_{k-1} = 0,\\ k \in 1 : m;\\ \partial\mathbf{L}/\partial X_{k-1} = K_k'R_kK_k + A_k'H_kA_k + K_k'B_k'H_kB_kK_k - H_{k-1} + Q_k+\\ +K_k'B_k'H_kA_k + A_k'H_kB_kK_k = 0,\ k \in 2 : m;\quad \partial\mathbf{L}/\partial X_m = -H_m + \Gamma = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Пусть

$$L_k = R_k + B_k'H_kB_k, \quad M_k = B_k'H_kA_k. \tag{6}$$

Для разрешения равенств (5) полагаем $K_k = -L_k^+M_k + Y_k - L_k^+L_kY_k$, причем для этого необходимо и достаточно, чтобы $L_kL_k^+M_kX_{k-1} = M_kX_{k-1}$. Здесь L^+ – псевдообратная матрица к L. Подстановка K_k в (5) дает (H_0 доопределяем при $k = 1$)

$$H_{k-1} = A_k'H_kA_k - M_k'L_k^+M_k + Q_k, \quad H_m = \Gamma, \quad k \in 1 : m. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть величины* $V_m(\eta) = \mathcal{V}_m(\Xi)$ *конечны и достигаются на некоторой паре* $(x_0, \mathbb{K})$. *Тогда существуют симметрические матрицы* $H_{1:m}$ *и* Γ, *удовлетворяющие уравнениям* (7), *где матрицы заданы в* (6), *причем*

$$L_k L_k^+ M_k X_{k-1} = M_k X_{k-1} \quad \text{и} \quad L_k \geqslant 0. \tag{8}$$

Более того, оптимальные матрицы записываются в виде $K_k^0 = -L_k^+ M_k + Y_k - L_k^+ L_k Y_k$, *где матрицы* $Y_k \in \mathbb{R}^{r\times n}$ *произвольны. Оптимальное значение* $V_m(\eta) = \mathcal{V}_m(\Xi) = \min\{-tr(\Gamma\Xi) + x_0' H_0 x_0 : x_0 \in \mathbf{X}_0,\, X_m = \Xi\}$.

Доказательство теоремы 2 сводится к представлению функционала в (3) в виде

$$\mathbf{J}(x_0, \mathbb{K}) = \sum_{k\in 1:m} tr((K_k + L_k^+ M_k)' L_k (K_k + L_k^+ M_k) X_{k-1}) - tr(\Gamma\Xi) + \\ + x_0' H_0 x_0. \tag{9}$$

Подробнее остановимся на неравенствах $L_k \geqslant 0$. Если $L_p \ngeqslant 0$ для некоторого $p \in 1:m$, то $\exists$ вектор h и число $\nu < 0$, такие, что $L_p h = \nu h$. Пусть N – матрица, состоящая из n столбцов-векторов h. Тогда $L_p N = \nu N$ и, полагая $K_k = -L_k^+ M_k$, $k \neq p$, $K_p = -L_p^+ M_p + \delta N/\sqrt{|\nu|}$, получаем $\mathcal{V}_m(X_m) = -\infty$, если $\delta \to \infty$.

Теорема 3. *Уравнения* (7) *совместно с соотношениями* (4), (6), (8) *достаточны для конечности величин* $\mathcal{V}_m(\Xi) = V_m(\eta) > -\infty$, *причем оптимальные значения* K_k *и соответствующий минимум указаны в теореме* 2. *Всего в системе* $2mn(n+1)/2$ *уравнений с таким же числом переменных:* $mn(n+1)/2$ *переменных* $H_{0:m-1}$, $n(n+1)/2$ *переменных* Γ *и* $(m-1)n(n+1)/2$ *переменных* $X_{1:m-1}$.

Следствие 2. *Введем матрицу*

$$\mathbf{H}_0 = \prod_{k\in 0:m-1} (A_{m-i} + B_{m-i} K_{m-i}^0).$$

Из формулы (4) *вытекает, что* $X_m = \mathbf{H}_0 X_0 \mathbf{H}_0'$. *Следовательно,* $tr(\Gamma X_m) = x_0' \mathbf{H}_0' \Gamma \mathbf{H}_0 x_0$. *Получаем ОД* $\mathcal{X}_m = \{\eta : \min\{x_0'(H_0 - \mathbf{H}_0' \Gamma \mathbf{H}_0) x_0 : x_0 \in \mathbf{X}_0,\, \mathbf{H}_0 X_0 \mathbf{H}_0' = \Xi = E\eta\eta'\} \leqslant 1\}$. *Здесь минимизация проводится при соблюдении неравенств в* (8).

4. Пример

Рассмотрим систему (1), в которой $n = m = 2$, $r = 1$, $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = -0.1$, $\bar{A}_1 = \sqrt{a_1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\bar{A}_2 = \sqrt{a_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\bar{B}_1 = \sqrt{a_1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$, $\bar{B}_2 = \sqrt{a_2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, где $a_k = 1 + \lambda_k^2/3$. В ограничении (2) имеем $R_1 = p$, $R_2 = 4$, $Q_1 = p\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $Q_2 = p\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, где $p \geqslant -1$ – числовой параметр. В системе здесь 12 переменных и такое же количество уравнений. Пусть $X_1 = (x_{1ij})$, $H_k = (h_{kij})$, $\Gamma = (\gamma_{ij})$, $x_0 = (x_{0i})$, $K_k = (k_{ki})$, $M_k = (m_{ki})$. При $k = 1$ получаем $h_{011} = pa_1 h_{111}/(p + a_1 h_{111}) + p$, $h_{012} = 0$, $h_{022} = p$, $k_{11} = -a_1 h_{111}/(p + a_1 h_{111})$, $k_{12} = 0$. Из уравнения (4) имеем $x_{111} = a_1(1 + k_{11})^2 x_{01}^2$, $x_{1i2} = 0$. При $k = 2$ получаем $\xi_{ij} = a_2(1 + k_{21})^2 x_{111}$ для всех i, j. Далее $\xi_{ij} = \xi$, $k_{22} = 0$. С другой стороны, $k_{21} = -a_2\gamma/(4 + a_2\gamma)$, где $\gamma = \gamma_{11} + \gamma_{22} + 2\gamma_{12}$. Наконец, из уравнения (7) при $k = 2$ находим $h_{111} = a_2\gamma + p - a_2^2\gamma^2/(4 + a_2\gamma)$, $h_{112} = h_{122} = 0$.

Из уравнений следует, что НВ $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{X}_2$ тогда и только тогда, когда $E\eta_1^2 = E\eta_2^2 = E\eta_1\eta_2$. Этим условиям удовлетворяет класс НВ вида $\eta_1 = \eta_2 = \alpha$, где α – некоторая НВ.

Продолжим решение. Величина $\xi = Fx_{01}^2$, где $F = a_1a_2(1+k_{11})^2(1+k_{21})^2$. Пусть $\mathbf{X}_0 = \{x_0 : x_0'x_0 \leqslant 1\}$. Тогда $V_2(\eta) = \mathcal{V}_2(\Xi) = \xi \min\{h_{011}/F - \gamma : L_2 \geqslant 0\}$, если $p > 0$, причем L_2 – возрастающая функция от γ. Положим, например, $p = 1$. Корень уравнения $L_2 = 0$ равен -1.3231 и $\min\{h_{011}/F - \gamma : L_2 \geqslant 0\} = 1.0838$, где минимум достигается в точке $\gamma = -1.0838$. Таким образом, допустимые значения $\xi \in [0, 0.9227]$. В качестве Γ можно брать любую симметричную матрицу с $\gamma = -1.0838$. При $p < 0$ для всякого $\xi \geqslant 0$ величины $V_m(\eta) = \mathcal{V}_m(\Xi) \leqslant 0$ остаются конечными. Это означает, что допустимый интервал для ξ совпадает с неотрицательной полуосью.

5. Заключение

• Рассмотрена задача оценивания одного класса дискретных по времени неопределенных процессов Лиу, в уравнения которых входят неизвестные детерминированные параметры, подчиненные априорным ограничениям.

• Исходная задача сведена к детерминированной многошаговой задаче для матриц и с фиксированным ограничением на правом конце траектории.

• Получены необходимые и достаточные условия конечности целевого функционала в детерминированной задаче.

• Рассмотрено численное решение исходной задачи на примере.

• В общем случае сведение задач с неопределенными помехами Лиу к детерминированным является непростым делом, поскольку математические ожидания не обладают, вообще говоря, свойством аддитивности. Полученная детерминированная задача также нетривиальна ввиду необходимости разрешения неявных уравнений с матрицами.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

Список литературы

1. Ананьев Б.И. О некоторых дополнениях к теории Лиу // Труды ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 1. С. 5–20.
2. Пытьев Ю.П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, приложения / 2-е изд., перераб. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 600 с.
3. Черноусько Ф.Л. Оценка множеств достижимости линейных систем с неопределенной матрицей // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 1. С. 32-34.
4. Kurzhanski A., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. SCFA. Boston: Birkhäuser, 2014. 445 p.
5. Liu Baoding. Uncertainty Theory / 4th Edition. Springer Uncertainty Research, 2015. 487 p.
6. Yao Kai. Uncertain Differential Equations. Springer Uncertainty Research, 2016. 158 p.
7. Zhu Yuanguo. Uncertain Optimal Control. Springer Uncertainty Research, 2019. 208 p.