УДК 519.7

К ВОПРОСУ О НАИЛУЧШЕМ РАСПОЛОЖЕНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Д.В. Баландин
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603022, Нижний Новгород, Гагарина пр., 23
E-mail: dbalandin@yandex.ru

Р.С. Бирюков
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603022, Нижний Новгород, Гагарина пр., 23
E-mail: ruslan.biryukov@itmm.unn.ru

М.М. Коган
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Россия, 603022, Нижний Новгород, Гагарина пр., 23
E-mail: mkogan@nngasu.ru

Ключевые слова: Обобщенный $\mathcal{H}_2$-наблюдатель, деформации высотных сооружений, упруго-демпферная система.

Аннотация: Исследуется проблема о наилучшем расположении измерительного устройства для оптимального оценивания состояния динамической системы. В качестве основной задачи, иллюстрирующей общий подход к указанной проблеме, рассматривается проблема оценивания максимальных деформаций механической системы, моделирующей динамику высотного здания при сейсмических воздействиях. Задача состоит в том, чтобы определить наилучшее расположение измерительного устройства, фиксирующего деформацию одного из конструктивных элементов сооружения и позволяющего на основе этого измерения получить оптимальную оценку деформации других элементов конструкции. Для решения этой задачи привлекается понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы линейной системы, описывающей динамику ошибки наблюдения. Приводятся результаты вычислительного эксперимента для математической модели высотного сооружения при сейсмических воздействиях.

1. Введение

В докладе обсуждается вопрос о наилучшем расположении измерительного устройства для оптимального оценивания состояния динамической системы. В основе предлагаемого подхода лежит понятие обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы линейной системы, описываемой обыкновенными дифференциальными или разностными уравнениями. В работах [1–3] подробно обсуждаются свойства обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы и указывается алгоритм вычисления этой характеристики с помощью решения уравнения Ляпунова или решения задачи полуопределенного программирования с ограничениями в виде линейных матричных неравенств. В работах [3, 4] с использованием указанного аппарата построен оптимальный наблюдатель для линейной системы, минимизирующий обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму линейной системы и, кроме того, обеспечивающий наилучшую эллисоидальную оценку состояния динамической системы. В данном докладе на примере системы, моделирующей колебания высотного здания при сейсмических воздействиях, обсуждается вопрос о наилучшей оценке максимальных деформаций этой механической системы. Оценивание деформации этой системы осуществляется наблюдателем, минимизирующим обобщенную $\mathcal{H}_2$-норму.

2. Мотивирующий пример

Рассмотрим модель колебаний высотного здания при сейсмическом воздействии на фундамент. На рис. 1 изображена общая схема указанного процесса. Этажи здания представляются материальными точками, последовательно связанными между собой и с фундаментом линейными упругими и диссипативными элементами. Колебания, порождаемые сейсмическим воздействием (движением фундамента), происходят в горизонтальной плоскости. Будем считать, что здание является однородным,

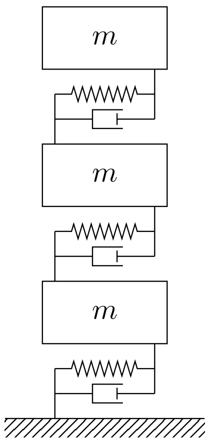

Рис. 1. Схематическое изображение здания как многомассовой упругой системы

т. е. массы материальных точек, коэффициенты упругости и демпфирования упругих и диссипативных элемнтов одинаковые. При указанном предположении динамика рассматриваемой конструкции (в безразмерных переменных и параметрах) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} + \beta\Lambda\dot{x} + \Lambda x = Gv, \qquad y = f_k x + w, \tag{1}$$

где x – вектор координат материальных точек относительно подвижного фундамента, v – с точностью до знака ускорение фундамента, y – измеряемый скалярный выход, определяющий деформацию межсекционного соединения двух соседних этажей здания, w – ошибка измерения деформации, β – параметр демпфирования,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что имеется только одно устройство для измерения деформации межсекционного соединения двух соседних этажей. Требуется разместить измерительное устройство, т. е. указать соответствующую вектор-строку f_k, чтобы максимальное значение из всех оценок для деформаций межсекционных соединений соседних этажей было наименьшим.

3. Обобщенное $\mathcal{H}_2$-норма и оптимальный наблюдатель

Рассмотрим линейную непрерывную нестационарную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \qquad z = C(t)x, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ – целевой выход и $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ – внешнее возмущение из класса $L_2\big([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_v}\big)$. Предположим, что целевой выход z разбит на блоки так, что

$$z = \mathrm{col}(z_1, \dots, z_m), \qquad z_k = C_k(t)x \in \mathbb{R}^{n_{z,k}}, \qquad n_{z,1} + \ldots + n_{z,m} = n_z,$$

и, соответственно, $C(t) = \mathrm{col}(C_1(t), \dots, C_m(t))$. Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы (2) была определена в [1, 2] через индуцированную норму оператора

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^{n_x} \times L_2\big([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_v}\big) \to L_\infty\big([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_z}\big) : \big(x_0, v\big) \mapsto z,$$

порожденного этой системой. Будем считать, что для заданной весовой матрицы $R^\top = R \geqslant 0$ начальное состояние системы x_0 можно представить в виде $x_0 = R^{1/2}w$, $|w| \leqslant 1$, тогда L_∞/L_2-норма оператора $\mathcal{L}$ определяется формулой

$$\|\mathcal{L}\|_{g\infty/2} = \sup\Big\{\|z\|_{g\infty} : w^\top w + \|v\|_2^2 \leqslant 1\Big\}, \tag{3}$$

здесь используются следующие обозначения:

$$\|v\|_2 = \left[\int\limits_{t_0}^{t_f} |v(\tau)|_2^2 d\tau\right]^{1/2}, \qquad \|z\|_{g\infty} = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_f} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |z_k(t)|_2.$$

Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. *Обобщенная $\mathcal{H}_2$-норма системы* (2) *на конечном горизонте $t \in [t_0, t_f]$ определяется формулой*

$$\|\mathcal{L}\|_{g\infty/2} = \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_f} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \lambda_{max}^{1/2}\big(C_k(t)Y(t)C_k^\top(t)\big), \tag{4}$$

где $Y(t)$ есть решение матричного дифференциального уравнения Ляпунова

$$\dot{Y} = A(t)Y + YA^\top(t) + B(t)B^\top(t), \qquad Y(t_0) = R. \tag{5}$$

Рассмотрим далее задачу оценивания состояния x линейной системы (2) по измерениям выхода $y(t) = F(t)x + D(t)v$, $t \in [t_0, t]$. Предположим, что для заданной матрицы $R^\top = R \geqslant 0$ начальное состояние x_0 и возмущение v удовлетворяют условию:

$$x_0 = \widehat{x}_0 + R^{1/2}w, \qquad w^\top w + \|v\|_2^2 \leqslant 1. \tag{6}$$

Построим наблюдатель полного порядка

$$\dot{\widehat{x}} = A(t)\widehat{x} + L(t)\big[y - F(t)\widehat{x}\big], \qquad \widehat{z} = C(t)\widehat{x}, \qquad \widehat{x}(t_0) = \widehat{x}_0, \tag{7}$$

где $\widehat{x}$ – оценка состояния x, $\widehat{z}$ – оценка целевого выхода z, а $L(t)$ – матрица параметров наблюдателя, подлежащая определению. Обозначим ошибку оценивания через $\varepsilon(t) = x(t) - \widehat{x}(t)$, тогда вектор-функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\dot{\varepsilon} = A_c(t)\varepsilon + B_c(t)v, \qquad \zeta = C(t)\varepsilon, \qquad \varepsilon(t_0) = x_0 - \widehat{x}_0, \tag{8}$$

в котором $A_c(t) = A(t) - L(t)F(t)$ и $B_c(t) = B(t) - L(t)D(t)$. Наблюдатель (7) является оптимальным обобщенным $\mathcal{H}_2$-наблюдателем, если матрица параметров $L(t)$ удовлетворяет условию

$$L^*(t) = \arg\inf_L \sup \Big\{ \|\zeta\|_{g\infty} : w^\top w + \|v\|_2^2 \leqslant 1 \Big\}. \tag{9}$$

В работе [3, 4] приведена формула для искомого оптимального наблюдателя и показано, что он обеспечивает наилучшую эллипсоидальную оценку состояния системы.

4. Оценивание деформаций многосвязной механической системы

Обратимся к задаче оценивания деформации многоэтажного здания при сейсмических воздействиях, динамика которого описывается дифференциальными уравнениями (1). Будем полагать, что можно измерить только одну межсекционную деформацию. Для решения задачи оценивания воспользуемся изложенным выше подходом к построению оптимального обобщенного $\mathcal{H}_2$-наблюдателя. В качестве измеряемой переменной выберем одну из межсекционных деформаций, при этом требуется оценить как эту деформацию, которая измеряется с ошибкой, так и все остальные межсекционные деформации между соседними этажами. Требуется определить местоположение измерительного устройства, при котором максимальная величина из указанных оценок межсекционных деформаций будет минимальна.

Для численных расчетов математической модели 10-этажного здания положим $t_0 = 0$, $t_f = 20$, параметр демпфирования $\beta = 0.1$, весовая матрица $R = 0$. На рис. 2 представлены результаты решения задачи о расположении датчика деформации в многоэтажном здании. Как следует из представленной диаграммы, наилучшее расположение измерительного устройства будет между первым этажом и фундаментом. Величина оценки деформации здания от расположения датчика увеличивается с поднятием измерительного устройства на последующие этажи здания.

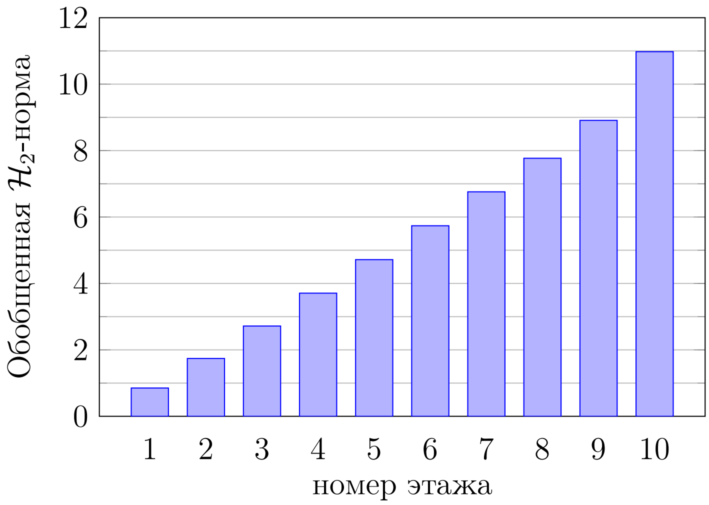

Рис. 2. Зависимость обобщенной $\mathcal{H}_2$-нормы от расположения измерительного датчика на этажах

5. Заключение

Представлено решение задачи о наилучшем расположении измерительного устройства для оптимального обобщенного $\mathcal{H}_2$-наблюдателя деформации многоэтажного здания при сейсмических воздействиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект FSWR-2023-0034) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Список литературы

1. Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Multi-objective generalized $\mathcal{H}_2$ control // Automatica. 2019. Vol. 99. P. 317-322.
2. Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Finite-horizon multi-objective generalized $\mathcal{H}_2$ control with transients // Automatica. 2019. Vol. 106. P. 27-34.
3. Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Ellipsoidal reachable sets of linear time-varying continuous and discrete systems in control and estimation problems // Automatica. 2020. Vol. 55. P. 108926.
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Управление и оценивание в линейных нестационарных системах на основе эллипсоидальных множеств достижимости // Автоматика и телемеханика. 2020. № 8. С. 8-28.