УДК 519.246.2

МОНИТОРИНГ СКРЫТОГО СОСТОЯНИЯ РЫНКА КАК ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ

А.В. Борисов

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2

E-mail: ABorisov@frccsc.ru

Ключевые слова: неполный рынок, стохастическое дифференциальное уравнение, марковский скачкообразный процесс, фильтрация, диффузионная аппроксимация, уравнение Блэка-Шоулза.

Аннотация: Доклад посвящен проблеме оценивания в реальном масштабе времени скрытого марковского скачкообразного состояния неполного финансового рынка. Рынок состоит из безрискового депозита, а также базового финансового инструмента и его деривативa. В качестве доступной статистической информации выступают высокочастотные потоки продаж рисковых инструментов. Данная прикладная задача оценивания рассмотрена как частный случай задачи фильтрации состояния стохастической дифференциальной системы. Предложен субоптимальный алгоритм ее численного решения, основанный на диффузионной аппроксимации доступных наблюдений.

1. Введение

Проблемам оценивания скрытых параметров в неполных финансовых рынках по разнородной статистической информации посвящено значительное число работ (см., например, [1–4]). Тем не менее, интерес к данным задачам не ослабевает из-за развития моделей рынков, расширения класса финансовых инструментов, доступных формальному описанию, а также расширению доступной статистической информации, которая может быть использована в процессе оценивания.

Цель доклада – представление субоптимального алгоритма оценивания скрытого состояния неполного финансового рынка, образованного безрисковым депозитом, базовым инструментом и его деривативом. Предполагается, что это состояние описывается некоторым однородным марковским скачкообразным процессом (МСП). В качестве доступной статистической информации выступают мультивариантные точечные процессы, описывающие случайные потоки продаж рисковых бумаг. Параметры этих потоков зависят от текущего состояния рынка. Торговля носит высокочастотный характер, и предлагаемый алгоритм оценивания использует этот факт, базируясь на диффузионной аппроксимации этих потоков.

Детальное описание исследуемого финансового рынка и алгоритма фильтрации его скрытого состояния приведено в [5–7].

2. Постановка задачи

Исследуемая модель безарбитражного неполного финансового рынка состоит из банковского депозита с известной процентной ставкой r, базового финансового инструмента с текущей ценой S_t и его производного инструмента (деривативa) с текущей ценой F_t. Эволюция S_t описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$dS_t = S_t Z_t^\top (adt + bdw_t), \quad t \in (0,T], \quad S_0 \sim p_0^S(s), \tag{1}$$

где известные векторы $a = \mathrm{col}(a_1, \dots, a_L)$ и $b = \mathrm{col}(b_1, \dots, b_L)$ определяют возможные значения ставки и волатильности, w_t – стандартный винеровский процесс, а $Z_t \in \{e_1, \dots, e_L\}$ – скрытое состояние рынка – однородный МСП с матрицей интенсивностей переходов (МИП) Λ и начальным распределением π_0^Z, описываемый системой СДУ [8] с мартингалом M_t в правой части

$$dZ_t = \Lambda^\top(t) Z_t dt + dM_t, \quad t \in (0,T], \quad Z_0 \sim p_0^Z. \tag{2}$$

Дериватив F_t имеет срок исполнения T и определяется известной функцией платежного требования $H(S_T)$.

Задача мониторинга скрытого состояния рынка заключается в построении оценок $\{Z_i\}$ в моменты времени $t_i = i\Delta$ $(i \in \mathbb{N},\ t_i \leqslant T)$, где $\Delta > 0$ – известный шаг по времени. При этом для обеспечения надлежащей точности оценивания предполагается, что шаг Δ мал в сравнении с МИП Λ, т.е. $\Delta \ll \min_{1 \leqslant \ell \leqslant L} |\Lambda_{\ell\ell}^{-1}|$.

Цены бумаг S_t и F_t недоступны прямому точному наблюдению, однако имеются следующая статистическая информация:

- $\{(\mathsf{S}_j \tau_j^S)\}_j$ – мультивариантный точечный процесс наблюдений базового актива;
- $\{(\mathsf{F}_k, \tau_k^F)\}_k$ – мультивариантный точечный процесс наблюдений дериватива.

Наблюдения удовлетворяют следующим условиям.

1. $\mathsf{S}_j \triangleq S_{\tau_j^S}$, т.е. в случайные моменты τ_j^S известны точные цены базового актива.
2. При известном процессе смены состояний рынка Z, случайные интервалы $\delta_j^S \triangleq \tau_j^S - \tau_{j-1}^S$ между моментами наблюдения цен S независимы в совокупности. Распределение δ_j^S зависит от текущего состояния рынка $Z_{\tau_{j-1}^S}$ и имеет известные условные моменты $m_\ell^S \triangleq \mathsf{E}\left\{\delta_j^S | Z_{\tau_{j-1}^S} = e_\ell\right\}$ и $D_\ell^S \triangleq \mathsf{E}\left\{(\delta_j^S - m_\ell^S)^2 | Z_{\tau_{j-1}^S} = e_\ell\right\}$.
3. $\mathsf{F}_k \triangleq F_{\tau_k^F}\ v_k$, т.е. в случайные моменты τ_k^F известны цены деривативов с некоторым мультипликативным шумом $\{v_k\}$, который при известном процессе переключений Z является дискретным белым шумом в узком смысле. Распределение v_k зависит от $Z_{\tau_{k-1}^S}$ и имеет известные условные моменты $m_\ell^v \triangleq \mathsf{E}\left\{\ln(v_k) | Z_{\tau_{k-1}^F} = e_\ell\right\}$ и $D_\ell^v \triangleq \mathsf{E}\left\{(\ln(v_k) - m_\ell^v)^2 | Z_{\tau_{k-1}^F} = e_\ell\right\}$.
4. При известном процессе Z интервалы $\delta_k^F \triangleq \tau_k^F - \tau_{k-1}^F$ между моментами наблюдения цен F независимы в совокупности. Распределение δ_k^F зависит от $Z_{\tau_{k-1}^S}$ и имеет известные условные моменты $m_\ell^F \triangleq \mathsf{E}\left\{\delta_i^F | Z_{\tau_{k-1}^F} = e_\ell\right\}$ и $D_\ell^F \triangleq \mathsf{E}\left\{(\delta_k^F - m_\ell^F)^2 | Z_{\tau_{k-1}^F} = e_\ell\right\}$.

5. При известном процессе Z случайные последовательности $\{v_k\}_i$, $\{\delta_j^S\}_j$ and $\{\delta_k^F\}_k$ независимы в совокупности.

6. Наблюдения цен являются *высокочастотными*, т.е. среднее время между сделками как по базовому активу, так и по деривативу много меньше шага по времени между моментами мониторинга состояния рынка, т.е. $\max_{1\leqslant i,j\leqslant L}\max(m_i^S, m_j^F) \ll \Delta$.

3. Алгоритм фильтрации

В [5] доказано, что цена деривативa F_t имеет вид $F_t = \mathbf{F}(t,S_t)Z_t$, где детерминированная вектор-функция $\mathbf{F}(t,s) \triangleq \mathrm{row}(\mathbf{F}^1(t,s),\dots,\mathbf{F}^L(t,s))$ – решение системы дифференциальных уравнений в частных производных – обобщение классического уравнения Блэка-Шоулза:

$$
\begin{cases}
\mathbf{F}_t^\ell = r\mathbf{F}^\ell - \sum\limits_{j=1}^{L}\Lambda_{\ell j}\mathbf{F}^j - (r-a_\ell)s\mathbf{F}_s^\ell - \frac{1}{2}b_\ell^2 s^2\mathbf{F}_{ss}^\ell, \quad \ell=\overline{1,L}, \quad t\in[0,T],\\
\mathbf{F}^\ell(T,s) = H(s).
\end{cases}
\tag{3}
$$

Приближенно-аналитический алгоритм вычисления $\mathbf{F}(t,s)$ представлен в [6]. В каждый момент времени t_i рассмотрим вектор преобразованных наблюдений

$$
\begin{aligned}
\mathtt{W}_i &= \mathrm{col}\left(\mathtt{W}_i^1,\mathtt{W}_i^2,\mathtt{W}_i^3,\mathtt{W}_i^4\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\mathrm{col}\left(\sum_{\substack{j:t_{i-1}\leqslant\tau_{j-1}^S<\\<\tau_j^S\leqslant t_i}} 1,\ \sum_{\substack{j:t_{i-1}\leqslant\tau_{j-1}^S<\\<\tau_j^S\leqslant t_i}} \ln\frac{\mathtt{S}_j}{\mathtt{S}_{j-1}},\ \sum_{\substack{k:t_{i-1}\leqslant\tau_{k-1}^F<\\<\tau_k^F\leqslant t_i}} 1,\ \sum_{\substack{k:t_{i-1}\leqslant\tau_{k-1}^F<\\<\tau_k^F\leqslant t_i}} \ln \mathtt{F}_k\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

При выполнении условия $Z_t \equiv e_\ell$, $t\in[t_{i-1},t_i]$ по центральной теореме для обобщенных процессов восстановления (ЦПТ ОПВ) [9] выполняется приближенное равенство распределения

$$
\mathtt{W}_i \simeq \mathcal{N}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{\Delta}}{m_\ell^S}\\ \left(a_\ell-\frac{b_\ell^2}{2}\right)\sqrt{\Delta}\\ \frac{\sqrt{\Delta}}{m_\ell^F}\\ \frac{\sqrt{\Delta}m_\ell^v}{m_\ell^F}+\sum\limits_{\substack{j:t_{i-1}\leqslant\tau_{j-1}^S<\\<\tau_j^S\leqslant t_i}}\mathbf{F}^\ell(\tau_j^F,S_{\tau_j^F})\end{bmatrix}}_{\triangleq\mathbf{m}_i^\ell},\ \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{D_\ell^S}{(m_\ell^S)^3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_\ell^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{D_\ell^F}{(m_\ell^F)^3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{D_\ell^v}{m_\ell^F}+\frac{(m_\ell^v)^2D_\ell^F}{(m_\ell^F)^3}\end{bmatrix}}_{\triangleq\mathbf{K}^\ell}\right).
$$

Предлагаемый алгоритм фильтрации имеет следующий вид.

Шаг 1. Инициализация начальных условий цикла фильтрации: $\widehat{Z}_0 = \pi_0^Z$, $\{\mathbf{K}^\ell\}_\ell$, $P := \exp(\Delta\Lambda^\top)$, $i := 0$, $t_i := 0$.

Шаг 2. Начало цикла $u := u + 1$, $t_i := t_i + \Delta$. Если $t_i > T$, то закончить цикл, иначе перейти к следующему шагу.

Шаг 3. Прогноз:

$$\overline{Z}_i = \exp\{\Delta\Lambda\}\widehat{Z}_{i-1}. \quad (5)$$

Шаг 4. Подготовка параметров коррекции: вычисление преобразованных вычислений $\mathtt{W}_i$ и параметров $\{\mathbf{m}_i^\ell\}_\ell$.

Шаг 5. Коррекция:

$$\widehat{Z}_i^\ell = \frac{\overline{Z}_i^\ell \mathcal{G}(\mathtt{W}_i, \mathbf{m}_i^\ell, \mathbf{K}^\ell)}{\sum_{k=1}^{L} \overline{Z}_i^k \mathcal{G}(\mathtt{W}_k, \mathbf{m}_i^k, \mathbf{K}^k)}, \qquad \ell = \overline{1, L}. \quad (6)$$

где $\mathcal{G}(x, m, K)$ – значение гауссовской плотности со средним m и невырожденной ковариационной матрицей K в точке x.

Шаг 6. Вернуться к Шагу 2.

4. Заключение

Доклад представляет алгоритм мониторинга скрытого марковского скачкообразного состояния неполного финансового рынка по наблюдениям базового актива и деривативa, полученным в случайные моменты времени. Данная прикладная задача решена с привлечением аппарата фильтрации состояний стохастических дифференциальных систем по разнородной статистической информации.

Предложенный алгоритм оценивания достаточно эффективен с вычислительной точки зрения благодаря высокочастотному характеру имеющихся наблюдений. Это свойство позволяет применить диффузионную аппроксимацию наблюдений в силу ЦПТ ОПВ. Оно же обеспечивает робастность предлагаемого алгоритма по отношению к неточному знанию вида распределения времени между сделками и мультипликативных шумов наблюдениях деривативов (при этом моментные характеристики данных распределений известны точно).

Список литературы

1. Elliott R., Malcolm W., Tsoi A. HMM volatility estimation // Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV, USA, 2002. Vol. 1. P. 398–404.
2. Runggaldier W. Estimation via Stochastic Filtering in Financial Market Models // Contemporary Mathematics. 2004. Vol. 351. P. 309–318.
3. Голдентаер Л., Клебанер Ф., Липцер Р. Слежение за функцией волатильности // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41, Вып. 3. С. 32–50.
4. Cvitanic J., Liptser R., Rozovskii B. A Filtering Approach to Tracking Volatility from Prices Observed at Random Times // Ann. Appl. Probab. 2006. Vol. 16. P. 1633–1652.
5. Борисов А. Рынок с марковской скачкообразной волатильностью I: мониторинг цены риска как задача оптимальной фильтрации // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17, Вып. 2. С. 27–33.

6. Борисов А. Рынок с марковской скачкообразной волатильностью II: алгоритм вычисления справедливой цены деривативов // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17, Вып. 3. С. 18–24.
7. Борисов А. Рынок с марковской скачкообразной волатильностью IV: алгоритм мониторинга рыночной цены риска по потоку высокочастотных наблюдений базовых активов и деривативов // Информатика и ее применения. 2024. Т. 18, Вып. 1. В печати.
8. Elliott R.J., Moore J.B., Aggoun L. Hidden Markov Models: Estimation and Control. New York: Springer. 2008.
9. Smith W. Regenerative stochastic processes // Proc. Royal Society of London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. 1955. Vol. 232, No. 1188. P. 6–31.