УДК 517.54

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ В ШУМЕ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

А.А. Галяев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: galaev@ipu.ru

В.Г. Бабиков
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: babikov@ipu.ru

П.В. Лысенко
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: pavellysen@ipu.ru

Л.М. Берлин
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: berlin.lm@phystech.edu

Ключевые слова: информационная энтропия, спектральная сложность, белый гауссовский шум.

Аннотация: Работа посвящена развитию методов распознавания сигналов на основе спектральных информационных характеристик сигнала. Установлена дискретная функция нормированного упорядоченного спектра для единичной оконной функции, входящей в ДПФ. Доказаны леммы об оценках энтропии, дисбаланса и статистической сложности при обработке временного ряда независимых гауссовских величин. Полученные теоретические результаты верифицированы численными экспериментами, которые подтвердили эффективность новой информационной характеристики при детектировании сигнала в смеси с белым шумом при малых отношениях сигнал/помеха.

1. Введение

Большое количество прикладных задач физики и техники от квантовой механики до астрономии связано с обнаружением слабых сигналов, детектируемых на фоне естественного шума. Причем требуется иметь возможность выделять детерминированные сигналы как хаотического, так и регулярного происхождения [1, 2]. В основе методов индикации и детектирования слабых сигналов лежат выборочные и тестовые статистики [3, 4]. В свою очередь, для оценки одного наблюдения или реализации случайной величины используются такие понятия как информационная энтропия, расстояние Кульбака-Лейблера, дивергенция Йенсена-Шеннона и некоторые другие, которые затем применяются в качестве критериев различных оптимизационных задач распознавания, классификации, фильтрации и отвечают за качество принимаемых на их основе решений [5, 6]. В докладе будет показано, что для дискретных спектров сигналов оказывается удобным использовать порядковые статистики [7], и будет введено понятие спектральной сложности распределения по отношению к гауссовскому белому шуму.

2. Постановка и решение задачи

В работах [5, 8] было получено, что одним из лучших критериев для задачи распознавания слабого сигнала в белом шуме является статистическая сложность на основе полной вариации меры со знаком:

$$C_{TV}(p) = -\frac{1}{4\log_2 N}\left(\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\left|p_i - \frac{1}{N}\right|\right)^2, \tag{1}$$

который связан с задачей различения двух гипотез и основан на одной из разновидностей леммы Неймана–Пирсона. Здесь и далее рассматриваются дискретные наборы величин $p = (p_1, ..., p_i, ..., p_N) \in \mathbb{R}^N$, которые по определению обладают свойствами дискретного распределения вероятностей: $\forall p_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, где N – размер ряда дискретных наборов данных.

Выражение (1) было получено при условии равномерности энергетического спектра белого шума. В реальности при применении ДПФ (дискретного преобразования Фурье) к некоторому временному интервалу белого шума вычисленный спектр не является равномерным, поэтому необходимо получить аналитические оценки функции распределения статистической сложности и решить задачу исследования свойств спектральных энергетических распределений.

Задача 1. *Пусть имеется реализация $\{x_1, \ldots, x_{2N}\}$ последовательности независимых случайных гауссовских величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_{2N}\}$, обладающих нулевым математическим ожиданием, к которой применено дискретное преобразование Фурье (ДПФ)*

$$X_k = \sum_{n=1}^{2N} x_n e^{-2\boldsymbol{i}\pi(k-1)(n-1)/(2N)}, \tag{2}$$

определяющее случайную величину

$$\Xi_k = \sum_{n=1}^{2N} \xi_n e^{-2\boldsymbol{i}\pi(k-1)(n-1)/(2N)}, \tag{3}$$

где $k = 1, .., N$, поскольку в силу свойства симметрии ДПФ вещественного сигнала вторая половина из $N+1, ..., 2N$ комплексных амплитуд спектральных отсчетов комплексно сопряжена с первой.

Требуется найти дискретную функцию нормированного упорядоченного спектрального распределения $n_k(N)$ как нормированное среднее для каждого k-го значения случайной величины

$$\eta_k(N) = \frac{(\mathbf{T}I)_k}{E_X}, \tag{4}$$

где $I_k = \Xi_k \Xi_k^*$ (квадрат модуля амплитуды или энергия спектрального отсчета), E_X – половина энергии сигнала, а $\mathbf{T}$ – оператор упорядочивания ряда в порядке невозрастания, и исследовать свойства полученного распределения на различных информационных мерах.

Для решения Задачи 1 нам потребуется несколько математических утверждений, сформулированных и доказанных далее.

Лемма 1. *[9] В Задаче 1 распределения случайных величин I_k $k = 1, ..., N$ являются экспоненциальными, если случайные величины ξ_n, $n = 1, ..., 2N$ – одинаково распределенные гауссовские с нулевым средним и дисперсией σ_0^2.*

Из Леммы 1 следует, что плотность распределения квадратов амплитуд имеет вид

$$\rho_{I_k}(y) = \frac{1}{N\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{y}{N\sigma_0^2}\right), \; y \geqslant 0. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть справедлива Лемма 1. Тогда нормированное упорядоченное распределение спектра имеет вид*

$$n_k(N) = -\frac{1}{N \cdot K_N} \ln \frac{k}{N+1}, \; \textit{где } K_N = -\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \ln \frac{k}{N+1}. \tag{6}$$

Лемма 2 определяет распределение нормированного упорядоченного спектра $n_k(N)$ и отклонения амплитуд от нее, которые быстро убывают с ростом N. Поэтому в модельном эксперименте энтропию белого шума предлагается оценивать по энергетическому спектру $e_k(N)$ ($k \in 1, ..., N$), который предварительно нормируется, так чтобы сумма амплитуд спектра по всем частотам равнялась единице $\sum\limits_{k=1}^{N} e_k(N) = 1$. Упорядочив получившийся спектр по амплитудам, получаем некоторую зависимость энергии $\tilde{e}_k(N)$ части спектра от номера k в упорядоченном массиве ($k = 1, ..., N$), а именно

$$\tilde{e}_k(N) = \frac{(\mathbf{T}I)_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} I_n} = \frac{\eta_k(N) E_X}{\sum\limits_{i=1}^{N} \eta_i(N) E_X} = \eta_k(N). \tag{7}$$

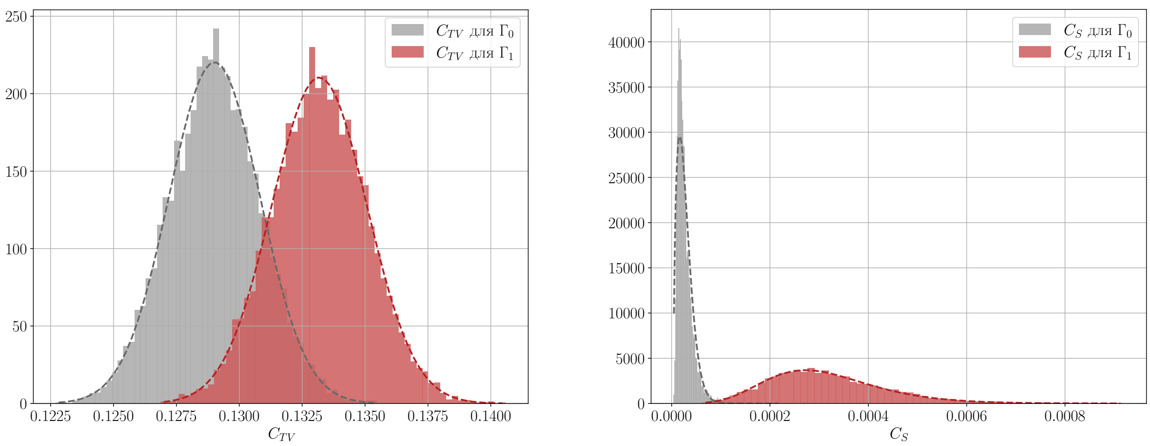
Опираясь на распределение (6) введем новые понятия спектрального дисбаланса и спектральной сложности.

Определение 1. *Спектральным дисбалансом и спектральной сложностью относительно спектрального распределения (6) назовем величины*

$$D_S(p) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{N}\left|p_k + \frac{1}{N \cdot K_N}\ln\frac{k}{N+1}\right|\right)^2,$$
$$C_S(p) = -\frac{1}{4\log_2 N}\left(\sum_{k=1}^{N} p_k \log_2 p_k\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\left|p_k + \frac{1}{N \cdot K_N}\ln\frac{k}{N+1}\right|\right)^2. \tag{8}$$

Сравнение информационных мер C_{TV} и C_S

В данном разделе приводится статистическое сравнение предложенной авторами информационной характеристики C_S (8) со стандартной статистической сложностью C_{TV} (1) как критериев в задаче обнаружения полезного детерминированного сигнала s_n, которая традиционно сводится к задаче различения двух гипотез о принятой последовательности данных. Гипотеза Γ_0 связана с принятием решения о приеме только шума, а гипотеза Γ_1 – о приеме смеси полезного сигнала и шума. На Рис. 1 показаны результаты набранной статистики для среднего значения отношения сигнала к шуму $SNR = -15$ dB. Как видно, качество разделения шума и смеси сигнала с шумом возрастает при использовании новой функции, так как носители распределений C_S в этом случае практически не пересекаются, в отличие от распределений C_{TV}. На Рис. 2 приведены зависимости AUC ROC для двух рассматриваемых информационных характеристик в зависимости от величины SNR. Видно, что для значений SNR от -15 dB до -20 dB C_S демонстрирует устойчивое преимущество над C_{TV}, что подтверждает эффективность и обоснованность применения спектральной сложности C_S для индикации появления сигнала в шумовой смеси.



(*а*) Гистограмма распределения значений C_{TV}

(*б*) Гистограмма распределения значений C_S

Рис. 1. Гистограммы информационных характеристик для среднего значения $SNR = -15$ dB, полученные для $Q = 10000$ реализаций сигнально-шумовой смеси длины $N = 16384$.

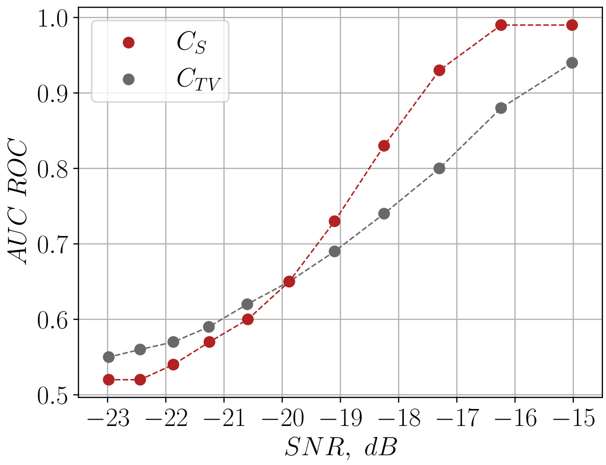


Рис. 2. Зависимость $AUC\ ROC$ от SNR

Заключение

Статистическая сложность и спектральная сложность (8), введенная авторами, показывают свою эффективность в задачах предобнаружения детерминированных сигналов в гауссовом шуме в одном фрейме. Более того, временные ряды вычисленных информационных характеристик от последовательности фреймов могут являться базисом для решения последующих задач классификации и распознавания. Использование разработанного метода предобнаружения совместно с классическими алгоритмами обнаружения представляется важным для прикладных задач детектирования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00134) в ИПУ РАН им. В. А. Трапезникова.

Список литературы

1. Amigo J.M., Rosso O.A. Ordinal methods: Concepts, applications, new developments, and challenges — In memory of Karsten Keller (1961–2022) // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2023. Vol. 33, No. 8. P. 080401.
2. Rosso O.A., Larrondo H.A., Martin M.T., Plastino A., Fuentes M.A. Distinguishing Noise from Chaos // Physical Review Letters. 2007. Vol. 99. P. 154102.
3. Forbes C., Evans M., Hastings N., Peacock B. Statistical Distributions. N.J.: John Wiley & Sons, 2010. 212 p.
4. Klenke A. Probability Theory: A Comprehensive Course. London: Springer, 2014. 638 p.
5. Галяев А.А., Лысенко П.В., Берлин Л.М. Статистическая сложность как критерий задачи обнаружения полезного сигнала // Автоматика и телемеханика. 2023. № 7. С. 858-871.
6. Kowalski A.M., Martin M.T., Plastino A., Rosso O.A., Casas M. Distances in Probability Space and the Statistical Complexity Setup // Entropy. 2011. Vol. 13, No. 6. P. 1055-1075.
7. Орлов И.Я., Фитасов Е.С. Оценка потерь обнаружения сигналов приемником с адаптивным порогом на основе метода порядковых статистик // Известия вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 7. С. 596-604.
8. Berlin L.M., Galyaev A.A., Lysenko P.V. Comparison of Information Criteria for Detection of Useful Signals in Noisy Environments // Sensors. 2023. Vol. 23, No. 4.
9. Richards M.A. The Discrete-Time Fourier Transform and Discrete Fourier Transform of Windowed Stationary White Noise // Technical memorandum. 2013. P. 1-24.