УДК 681.51

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОНЛАЙН ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

**А.И. Глущенко**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: aiglush@ipu.ru

**К.А. Ласточкин**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: lastconst@yandex.ru

**Ключевые слова:** параметрическая идентификация, асимптотическая сходимость, линейные системы, ограниченные возмущения.

**Аннотация:** Работа посвящена решению задачи идентификации параметров линейных динамических систем, функционирующих в замкнутом контуре управления при действии неизвестных, но ограниченных возмущений. На базе метода инструментальных переменных и процедуры динамического расширения и смешивания регрессора предложен новый алгоритм идентификации, который при $i$) частотном богатстве задающего воздействия и $ii$) отсутствии пересечений спектров задания и возмущения гарантирует асимптотическую сходимость к нулю ошибки идентификации. Теоретические выкладки проиллюстрированы результатами математического моделирования.

## 1. Введение

В теории параметрической идентификации можно выделить онлайн и оффлайн методы оценки параметров линейных динамических систем [1]. Оффлайн алгоритмы идентификации при достаточно большом числе некоррелированных измерений переменных процесса позволяют точно определить неизвестные параметры линейных динамических систем даже при действии неизвестных, но ограниченных внешних возмущений [1,2]. Однако онлайн методы идентификации при наличии ограниченных возмущений, в общем случае, гарантируют только ограниченность параметрической ошибки идентификации [3]. Для преодоления этого недостатка В. О. Никифоров предложил [4, 5] на основании метода внутренней модели расширить задачу идентификации путем параметризации возмущения в виде линейной регрессии с неизвестными параметрами и измеряемым регрессором. Такой подход приводит к перепараметризации, требует точного знания формы/типа действующего возмущения и подходит для описания достаточно специфического класса возмущений (гармонические, постоянные, экспоненциально затухающие сигналы и их комбинации). В данной работе на основании метода инструментальной переменной, зарекомендовавшего себя при решении задач оффлайн идентификации [1, 2], развивается безмодельный подход к решению задачи онлайн идентификации при действии возмущений.

Основным результатом работы является новый алгоритм идентификации, который: $i$) не требует точного знания типа внешнего возмущения, $ii$) при частотном богатстве задающего воздействия и отсутствии пересечений спектров задающего воздействия и возмущения гарантирует асимптотическую сходимость к нулю ошибки идентификации параметров линейных систем в замкнутом контуре управления и $iii$) не приводит к перепараметризации.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим возмущенную линейную динамическую систему

$$\begin{array}{l} y\left(t\right)=\frac{Z(\theta,\, s)}{R(\theta,\, s)}\left[u\left(t\right)+f\left(t\right)\right], \\ Z\left(\theta,\, s\right)=b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\ldots+b_0, \\ R\left(\theta,\, s\right)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0, \end{array} \tag{1}$$

вместе с ее параметризацией в виде линейного регрессионного уравнения:

$$z\left(t\right)=\varphi^{\mathrm{T}}\left(t\right)\theta+w\left(t\right), \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} z\left(t\right)=\frac{s^n}{\Lambda(s)}y\left(t\right), \\ \varphi\left(t\right)=\begin{bmatrix}-\frac{\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}(s)}{\Lambda(s)}y\left(t\right) & \frac{\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}(s)}{\Lambda(s)}u\left(t\right)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\ w\left(t\right)=\begin{bmatrix}b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0\end{bmatrix}\frac{\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}(s)}{\Lambda(s)}f\left(t\right), \\ \lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}\left(s\right)=\begin{bmatrix}s^{n-1} & \cdots & s & 1\end{bmatrix}, \theta=\begin{bmatrix}a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & b_0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \end{gathered}$$

и $y\left(t\right)$ – измеряемый выход, $u\left(t\right)$ – формируемое управление, $f\left(t\right)$ – неизвестное возмущение, $\theta\in\mathbb{R}^{2n}$ – вектор неизвестных параметров, $\varphi\left(t\right)\in\mathbb{R}^{2n}$ – измеряемый регрессор, $s\colon=\frac{d}{dt}$, $\Lambda\left(s\right)$ – приведенный Гурвицев полином порядка $n$.

Предположим, что управление $u\left(t\right)$ формируется линейным регулятором:

$$u\left(t\right)=\frac{P_y\left(\kappa,\, s\right)}{Q_y\left(\kappa,\, s\right)}y\left(t\right)+\frac{P_r\left(\kappa,\, s\right)}{Q_r\left(\kappa,\, s\right)}r\left(t\right), \tag{3}$$

где $\kappa\in\mathbb{R}^{n_\kappa}$ – известные постоянные параметры закона управления, $r\left(t\right)$ – задающее воздействие, $m_y\leqslant n_y$ и $m_r\leqslant n_r$ – порядки пар полиномов $P_y\left(\kappa,\, s\right), Q_y\left(\kappa,\, s\right)$ и $P_r\left(\kappa,\, s\right), Q_r\left(\kappa,\, s\right)$, соответственно.

Относительно управления $u\left(t\right)$, задания $r\left(t\right)$, выхода $y\left(t\right)$ и возмущения $f\left(t\right)$ принимаются выполненными следующие допущения.

**Допущение 1.** *Возмущение $f\left(t\right)$ ограничено, а управление* (3) *является стабилизирующим, т.е. сигналы $u\left(t\right)$ и $y\left(t\right)$ ограничены.*

**Допущение 2.** *Задание $r(t)$ и возмущение $f(t)$ заданы следующим образом:*

$$r(t) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \sin\left(\omega_k^r t\right),\, \omega_i^r \neq \omega_j^r\ \forall i \neq j, i \in \overline{1, n},\, j \in \overline{1, n},$$
$$f(t) = \sum_{k=1}^{n_f} \delta_k \sin\left(\omega_k^f t\right),\, \omega_i^r \neq \omega_j^f\ \forall i \in \overline{1, n},\, j \in \overline{1, n_f},$$

*где число $n_f$, амплитуды $\delta_j$ и частоты $\omega_j^f$ неизвестны.*

Требуется построить закон идентификации, гарантирующий выполнение предельного равенства:

$$\lim_{t\to\infty}\left|\tilde{\theta}_i(t)\right| = \lim_{t\to\infty}\left|\hat{\theta}_i(t) - \theta_i\right| = 0\ \forall i \in \overline{1,\ 2n}, \tag{4}$$

где $\hat{\theta}_i(t)$ – оценка $i$-го неизвестного параметра.

# 3. Основной результат

Подставим (1) в (3) и (3) в (1):

$$\begin{gathered}
u(t) = W_{cl}(\theta, s)\, R(\theta, s)\left[r(t) + \frac{P_y(\kappa, s) Z(\theta, s) Q_r(\kappa, s)}{Q_y(\kappa, s) R(\theta, s) P_r(\kappa, s)} f(t)\right],\\
y(t) = W_{cl}(\theta, s)\, Z(\theta, s)\left[r(t) + \frac{Q_r(\kappa, s)}{P_r(\kappa, s)} f(t)\right],\\
W_{cl}(\theta, s) = \frac{P_r(\kappa, s) Q_y(\kappa, s)}{Q_r(\kappa, s)[Q_y(\kappa, s) R(\theta, s) - Z(\theta, s) P_y(\kappa, s)]}.
\end{gathered}$$

откуда случай $f(t) = 0$ мотивирует следующий выбор инструментальной переменной [2]:

$$\begin{gathered}
y_{iv}(t) = \frac{Z(\theta_{iv}, s)}{R(\theta_{iv}, s)} u_{iv}(t),\\
u_{iv}(t) = \frac{P_y(\kappa, s)}{Q_y(\kappa, s)} y_{iv}(t) + \frac{P_r(\kappa, s)}{Q_r(\kappa, s)} r(t),\\
\zeta(t) = \left[-\frac{\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}(s)}{\Lambda(s)} y_{iv}(t) \quad \frac{\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}(s)}{\Lambda(s)} u_{iv}(t)\right]^{\mathrm{T}},
\end{gathered} \tag{5}$$

где $\theta_{iv}$ – известные параметры инструментальной модели, такие, что замкнутая система (5) устойчива.

С использованием инструментальной переменной (5) выполним расширение регрессионного уравнения (2) с помощью усредняющего фильтра и фильтра типа скользящее среднее:

$$\begin{gathered}
\dot{\vartheta}(t) = \zeta(t) z(t) - \zeta(t-T) z(t-T),\, \vartheta(t_0) = 0_{2n},\\
\dot{\psi}(t) = \zeta(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t) - \zeta(t-T)\varphi^{\mathrm{T}}(t-T),\, \psi(t_0) = 0_{2n\times 2n},
\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}
\dot{Y}(t) = -\frac{1}{F(t)}\dot{F}(t)\left(Y(t) - \vartheta(t)\right),\, Y(t_0) = 0_{2n},\\
\dot{\Phi}(t) = -\frac{1}{F(t)}\dot{F}(t)\left(\Phi(t) - \psi(t)\right),\, \Phi(t_0) = 0_{2n\times 2n},\\
\dot{F}(t) = p t^{p-1},\, F(t_0) = F_0 > 0,
\end{gathered} \tag{7}$$

где $T > 0$ – ширина окна, $p \geqslant 1,\ F_0 > 0$ – параметры фильтрации.

Применение фильтраций (6) и (7) позволяет получить следующее регрессионное уравнение:

$$Y(t) = \Phi(t)\,\theta + W(t), \tag{8}$$

где возмущение $W(t)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{gathered}\dot{W}(t) = -\tfrac{1}{F(t)}\dot{F}(t)\left(W(t) - \varepsilon(t)\right), W(t_0) = 0_{2n},\\ \dot{\varepsilon}(t) = \zeta(t)\,w(t) - \zeta(t-T)\,w(t-T), \varepsilon(t_0) = 0_{2n}.\end{gathered}$$

Умножив (8) на $\operatorname{adj}\{\Phi(t)\}$, имеем набор скалярных регрессионных уравнений:

$$\begin{gathered}\mathcal{Y}_i(t) = \Delta(t)\,\theta_i + \mathcal{W}_i(t),\\ \mathcal{Y}(t) := \operatorname{adj}\{\Phi(t)\}\,Y(t), \Delta(t) := \det\{\Phi(t)\},\\ \mathcal{W}(t) := \operatorname{adj}\{\Phi(t)\}\,W(t).\end{gathered}$$

**Теорема 1.** *Предположим, что выполнены следующие условия:*

*1)* $|\Delta(t)| \geqslant \Delta_{\mathrm{LB}} > 0\ \forall t \geqslant T$ *и* $\Delta_{\mathrm{UB}} \geqslant |\Delta(t)|\ \forall t \geqslant t_0$,

*2)* $|\mathcal{W}_i(t)| \leqslant \frac{\dot{F}(t)c_{\mathcal{W}}}{F(t)} < \infty$.

*Тогда закон идентификации*

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) = -\gamma\Delta(t)\left(\Delta(t)\,\hat{\theta}_i(t) - \mathcal{Y}_i(t)\right), \hat{\theta}_i(t_0) = \hat{\theta}_{0i}, \gamma > 0$$

*гарантирует выполнение поставленной цели* (4).

Очевидно, что регрессор $\Delta(t)$ ограничен сверху при выполнении допущения 1. Связь остальных предпосылок теоремы с допущением 2 дается в следующих утверждениях:

**Утверждение 1.** *Пусть* $r(t)$ *стационарен и предположим, что*

*1)* $H(j\omega_1), \ldots, H(j\omega_{2n})$ *линейно независимы на* $\mathbb{C}^{2n}$ *для всех* $\omega_1, \ldots, \omega_{2n} \in \mathbb{R}$, *таких, что* $\omega_i \neq \omega_k$ *для* $i \neq k$;

*2)* $rank\{[M(j\omega_1), \ldots, M(j\omega_{2n})]\} = 2n$ *для всех* $\omega_1, \ldots, \omega_{2n} \in \mathbb{R}$, *таких, что* $\omega_i \neq \omega_k$ *для* $i \neq k$.

*Здесь* $H(s) = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}(s)W_{cl}(\theta,s)Z(\theta,s)}{\Lambda(s)} & \frac{\lambda_{n-1}^{\mathrm{T}}(s)W_{cl}(\theta,s)R(\theta,s)}{\Lambda(s)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $M(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) & 0 \\ 0 & G_2(s)\end{bmatrix}$, *а* $G_1(s), G_2(s)$ *таковы, что*

$$\begin{gathered}G_1(s)\,\lambda_{n-1}(s)\,W_{cl}(\theta,s)\,Z(\theta,s) = \lambda_{n-1}(s)\,W_{cl}(\theta_{iv},s)\,Z(\theta_{iv},s),\\ G_2(s)\,\lambda_{n-1}(s)\,W_{cl}(\theta,s)\,R(\theta,s) = \lambda_{n-1}(s)\,W_{cl}(\theta_{iv},s)\,R(\theta_{iv},s).\end{gathered}$$

*Тогда существуют* $T > 0$ *и* $\Delta_{\mathrm{LB}} > 0$, *такие, что*

$$|\Delta(t)| \geqslant \Delta_{\mathrm{LB}} > 0\ \forall t \geqslant T$$

*если и только если* $r(t)$ *частотно богато порядка* $2n$ *(содержит* $n$ *различных частот, т.е. удовлетворено допущение 2).*

**Утверждение 2.** *Пусть верны допущения 1 и 2, тогда* $|\mathcal{W}_i(t)| \leqslant \frac{\dot{F}(t)c_{\mathcal{W}}}{F(t)} < \infty$.

Ввиду ограничения на объем статьи доказательства утверждений не приводятся.

# 4. Моделирование

Для примера рассмотрим следующую линейную динамическую систему

$$y(t) = \begin{cases} \frac{8}{s^2+s+2}\left[u(t)+f(t)\right], \text{ if } t < 50, \\ \frac{6}{s^2+4s-2}\left[u(t)+f(t)\right], \text{ if } t \geqslant 50, \end{cases}$$

где управление, задание и возмущение заданы следующим образом:

$$\begin{array}{l} u(t) = \frac{2s^2+s+2}{s}\left[r(t) - y(t)\right], \\ r(t) = \sin(2\pi t) + \cos(3t), \\ f(t) = 0.25\sin(0.1\pi t) + \sin(4t) + 1. \end{array}$$

Параметры предлагаемого алгоритма идентификации установим в соответствии с выражением:

$$\begin{array}{c} \Lambda(s) = R(\theta_{iv}, s) = s^2 + 20s + 100, \\ Z(\theta_{iv}, s) = 2, \ T = 10, \ p = 10, \ \gamma = 10^{18}. \end{array}$$

На рис. 1 приведены переходные процессы по возмущению $\|\mathcal{W}(t)\|$, регрессору $\Delta(t)$ и оценкам $\hat{\theta}(t)$.

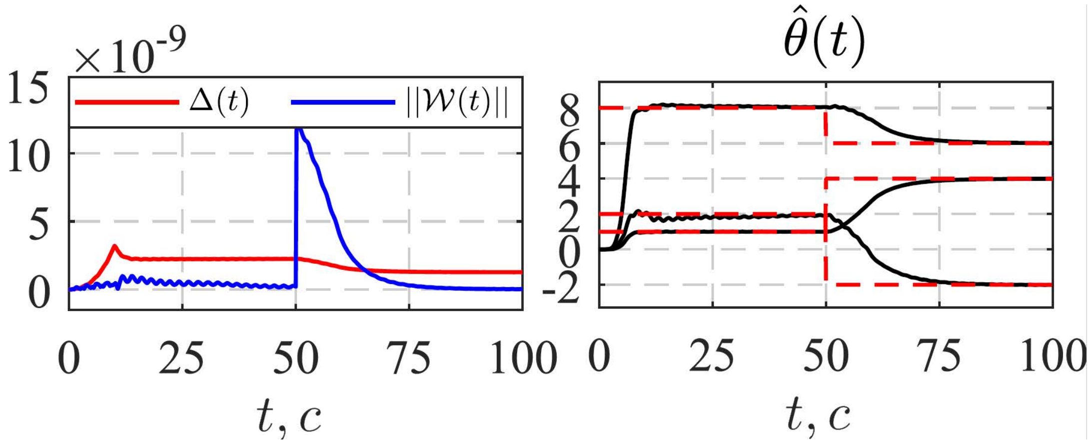


Рис. 1. Переходные процессы по $\|\mathcal{W}(t)\|$, $\Delta(t)$ и $\hat{\theta}(t)$.

Результаты моделирования иллюстрируют выводы, сделанные в теоретическом анализе, а именно свидетельствуют о выполнении как предпосылок теоремы 1, так и целевого условия (4).

# Список литературы


1. Ljung L. System identification. Boston, MA: Birkhauser, 1998.
2. S?derstr?m T., Stoica P. Instrumental variable methods for system identification // Circuits, Systems and Signal Processing. 2002. Vol. 21. No. 1. P. 1-9.
3. Narendra K. S., Annaswamy A. M. Stable adaptive systems. Courier Corporation, 2012.
4. Никифоров В. О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений I. Объекты с известными параметрами // АиТ. 2004. №. 10. С. 13-24.
5. Никифоров В. О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // АиТ. 2004. №. 11. С. 40-48.