УДК 517.977.1

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.А. Каменщиков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: mkamenshchikov@cs.msu.ru

Ключевые слова: функциональный фильтр, пониженный порядок, непрерывно-дискретные системы, установившаяся среднеквадратичная ошибка.

Аннотация: В докладе рассматривается задача построения функциональных фильтров, формирующих несмещенную оценку линейного функционала от неизвестного фазового вектора непрерывно-дискретной динамической системы при аддитивных белых шумах. В качестве критерия оптимальности используется установившаяся среднеквадратичная ошибка фильтрации, для вычисления которой используется метод интегральных квадратичных оценок качества. Предложены необходимые и достаточные условия несмещенности оценки, формируемой искомым функциональным фильтром.

1. Введение

Доклад посвящен развитию методов построения функциональных фильтров для непрерывно-дискретных динамических систем при аддитивных белых шумах.

Для дискретных и непрерывных стохастических систем хорошо известны классические фильтры Калмана [1] и Калмана-Бьюси [2], Колмогорова [3] и Винера [4], которые обеспечивают минимум среднеквадратичной ошибки и ее установившегося значения соответственно. Кроме того, существуют полноразмерные фильтры Калмана для непрерывно-дискретных систем [5].

Вместо фильтров полной размерности для непрерывных и дискретных систем ранее [6–10] предлагались функциональные фильтры или фильтры пониженной размерности, которые позволяют снизить время вычисления искомой оценки.

В докладе предлагается развитие предыдущих результатов [6–10] применительно к классу непрерывно-дискретных систем, то есть стохастических систем с непрерывным законом динамики и дискретным законом измерений.

Для построения непрерывно-дискретных функциональных фильтров применяется метод интегральных квадратичных оценок качества, позволяющий установить явную зависимость критерия оптимальности от неизвестных параметров. В докладе предлагаются необходимые и достаточные условия несмещенности оценок, формируемых функциональными фильтрами. Результаты доклада иллюстрируются на вычислительных примерах.

2. Постановка задачи

Для n-мерной непрерывно-дискретной стохастической системы вида

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + w(t), \\ y(t_i) & = & Cx(t_i) + v(t_i); \end{array} \right. \tag{1}
$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор; $y(t_i) \in \mathbb{R}^l$ – измеряемый выход, доступный только в дискретные моменты времени $t_{i+1} = t_i + h$, $h > 0$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $t_0 = 0$; A и C – постоянные матрицы соответствующих размеров; $w(t)$ и $v(t_i)$ – белые случайные процессы размерности n и l соответственно, некоррелированные друг с другом и с начальным состоянием $x(0)$ – случайным вектором с известными вероятностными характеристиками:

$$
\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} w(t) \\ v(t_i) \\ x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^\intercal(\tau) & v^\intercal(t_j) & x^\intercal(0) & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} Q\delta(t-\tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_0 + \bar{x}_0\bar{x}_0^\intercal & \bar{x}_0 \end{bmatrix}, \tag{2}
$$

где $i, j \in \mathbb{Z}_+$, $t, \tau \in \mathbb{R}_+$; Q, P_0 – известные постоянные положительно полуопределенные матрицы; R – известная постоянная положительно определенная матрица; $\delta(t-\tau)$ – дельта-функция Дирака; δ_{ij} – символ Кронекера
требуется построить функциональный фильтр вида

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\widetilde{q}}(t) & = & N_c\widetilde{q}(t),\ \widetilde{q}(0) = T\bar{x}_0, \\ \widetilde{q}(t_i) & = & N_d\widetilde{q}^-(t_i) + My(t_i),\ i \in \mathbb{N}, \\ \widetilde{\sigma}(t) & = & P\widetilde{q}(t),\ t \in [t_j, t_{j+1}),\ j \in \mathbb{Z}_+; \end{array} \right. \tag{3}
$$

где $\widetilde{q}(\cdot) \in \mathbb{R}^k$ – вектор состояния фильтра после измерения выхода $y(t_i)$ и несмещенная оценка вектора $q(\cdot) = Tx(\cdot)$, $k < n$; $\widetilde{q}^-(t_i)$ – вектор состояния фильтра до измерения выхода $y(t_i)$; $N_c \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $T \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $N_d \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $M \in \mathbb{R}^{k\times l}$ и $P \in \mathbb{R}^{p\times k}$ – постоянные матрицы, подлежащие определению; $\widetilde{\sigma}(t) \in \mathbb{R}^p$ – оптимальная несмещенная линейная оценка линейного функционала от фазового вектора исходной системы

$$
\sigma(t) = Fx(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad F \in \mathbb{R}^{p\times n} \text{ – известная матрица;} \tag{4}
$$

в смысле установившейся среднеквадратичной ошибки фильтрации $e(\cdot) = \sigma(\cdot) - \widetilde{\sigma}(\cdot)$

$$
J_\infty = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[e^\intercal(t)e(t)] + \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}[e^\intercal(t_i)e(t_i)] \to \min. \tag{5}
$$

3. Основной результат

Определяя математическое ожидание для решения первого уравнения системы (1)

$$
x(t) = e^{At}x(0) + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}w(\tau)d\tau
$$

с учетом вероятностных характеристик (2) и используя теорему Гамильтона–Кэли, можно получить, что

$$\mathbb{E}\left[x(t)\right] = e^{At}\bar{x}_0 \in \left\langle \bar{x}_0, A\bar{x}_0, \ldots, A^{n-1}\bar{x}_0 \right\rangle, \tag{6}$$

где $\langle \bar{x}_0, A\bar{x}_0, \ldots, A^{n-1}\bar{x}_0 \rangle$ – линейное пространство, порожденное векторами $\bar{x}_0, A\bar{x}_0, \ldots, A^{n-1}\bar{x}_0$.

Используя формулу (6) и выражения для невязок $\varepsilon(\cdot) = q(\cdot) - \widetilde{q}(\cdot)$ и $e(\cdot) = \sigma(\cdot) - \widetilde{\sigma}(\cdot)$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Необходимые и достаточные условия несмещенности оценки линейного функционала* (4)*, формируемой функциональным фильтром* (3) *для системы* (1) *с вероятностными характеристиками* (2)*, имеют вид*

$$\begin{aligned}
(TA - N_c T)U_{A,\bar{x}_0} &= 0, \\
(T - MC - N_d T)U_{A,\bar{x}_0} &= 0, \\
(F - PT)U_{A,\bar{x}_0} &= 0;
\end{aligned}$$

где U_{A,x_0} – матрица управляемости для пары $\{A, \bar{x}_0\}$, то есть

$$U_{A,x_0} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 & A\bar{x}_0 & \ldots & A^{n-1}\bar{x}_0 \end{bmatrix}.$$

Для фильтра (3) полной размерности, в котором $k = n$, $T = I_n$ и $\operatorname{rank} U_{A,x_0} = n$, условиям теоремы 1 удовлетворяют матрицы стационарного непрерывно-дискретного фильтра Калмана

$$N_c = A, \quad N_d = I_n - KC, \quad M = K, \quad P = F,$$

где $K \in \mathbb{R}^{n \times l}$ – матрица оптимальных коэффициентов усиления.

Для определения зависимости целевой функции (5) от параметров используется интерпретация установившегося значения квадрата ошибки фильтрации как $\mathcal{H}_2$ нормы от взвешенных передаточных матриц $W_{ew}(s)$, $W_{ev}(z)$ от шумов $w(t)$ и $v(t_i)$ к невязке $e(\cdot)$

$$J_{c,\infty} = \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}[e^{\mathsf{T}}(t)e(t)] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_{ew}(j\omega) Q W_{ew}^{\mathsf{T}}(-j\omega) d\omega \right],$$

$$J_{d,\infty} = \lim_{i \to \infty} \mathbb{E}[e^{\mathsf{T}}(t_i)e(t_i)] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr} \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} W_{ev}(e^{j\theta}) R W_{ev}^{\mathsf{T}}(e^{-j\theta}) d\theta \right].$$

4. Заключение

В работе рассматривается метод построения функциональных фильтров, формирующих несмещенную линейную оптимальную оценку линейного функционала от неизвестного фазового вектора непрерывно-дискретной динамической системы. При этом оптимальность оценки понимается в смысле минимума установившейся среднеквадратичной ошибки фильтрации. Для синтезируемого функционального фильтра предложены необходимые и достаточные условия несмещенности оценки. Работоспособность предложенного метода подтверждается на вычислительных примерах.

Список литературы

1. Kalman R.E. A New approach to linear filtering and prediction problems // Journal of Basic Engineering. 1960. Vol. 82, No. 1. P. 35–45.
2. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory // Journal of Basic Engineering. 1961. Vol. 83, No. 1. P. 95–108.
3. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. 1941. Т. 5, № 1. С. 3–14.
4. Wiener N. Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series: With Engineering Applications. Cambridge: The MIT Press, 1949. 163 p.
5. Lewis F.L., Xie L., Popa D. Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory. Boca Raton: CRC Press, 2008. 523 p.
6. Fomichev V.V., Kamenshchikov M.A. Comparative analysis of optimal filters of the second and third order for continuous-time systems // Differential Equations. 2021. Vol. 57, No. 11. P. 1527–1535.
7. Fomichev V.V., Kamenshchikov M.A. Synthesis of suboptimal filters for multivariable multicriteria discrete systems // Differential Equations. 2022. Vol. 58, No. 8. P. 1097–1104.
8. Kamenshchikov M.A., Kapalin I.V. A procedure for constructing optimum functional filters for linear stationary stochastic systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2018. Vol. 42, No. 4. P. 163–170.
9. Kamenshchikov M.A. Transfer functions of optimum filters of different dynamic orders for discrete systems // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2021. Vol. 45, No. 2. P. 60–70.
10. Kamenshchikov M.A. Conditions for existence of second-order and third-order filters for discrete systems with additive noises // Mathematics. 2022. Vol. 10, No. 3. P. 370.