

УДК 519.23, 519.856

# ПРИМЕНЕНИЕ РОБАСТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО СИГНАЛА

**К.В. Семенихин**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: siemenkv@mail.ru

**А.С. Архипов**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: ege3145@yandex.ru

**Ключевые слова:** робастная стохастическая оптимизация, многомерная граница Селберга, минимаксное оценивание, вероятность ошибки, ограниченный сигнал, свх.

**Аннотация:** Рассматривается робастная по отношению к виду распределения помех задача минимаксного оценивания ограниченного гладкого сигнала по конечному числу измерений. Целевой функционал – вероятность превышения  $L_2$ -нормой ошибки заданного порога. Его максимум по распределениям помех (с фиксированными средним и ковариацией) и сигналам с ограниченной второй производной требуется минимизировать на конечномерном классе сплайновых оценок. Задача решается методами выпуклого программирования за счет выражения целевого функционала через среднеквадратичную границу, следующую из неравенства Маркова, и точную вероятностную границу в виде многомерного неравенства Селберга. Проведен численный эксперимент для сравнительного анализа полученных решений в задаче восстановления траектории движения цели.

## 1. Введение

Робастная стохастическая оптимизация (*distributionally robust optimization*) включает большое разнообразие моделей, содержащих априорную неопределенность в терминах распределения случайных данных [1, 3–5, 7, 8, 11]. Идея этого подхода состоит в том, чтобы на заданном классе стратегий минимизировать наихудшее значение вероятностного функционала риска при условии, что случайные параметры модели имеют произвольное распределение из некоторого семейства. Важнейшим примером семейства, допускающего явный вид наихудшего значения вероятностного функционала, является класс распределений с фиксированными математическим ожиданием и ковариационной матрицей [9]. Данный факт

используется в стохастическом программировании и его приложениях [4, 5, 11]. Последние публикации в области робастной стохастической оптимизации используют вероятностные метрики (расстояние Вассерштейна, относительную энтропию и т.п.) для измерения отклонения эмпирического распределения от теоретического [2, 3].

В данной работе рассматривается задача оценивания, в которой критерием оптимизации выступает минимум вероятности ошибки (т.е. вероятности того, что ошибка оценки превысит заданный порог) в условиях априорной неопределенности, заданной в терминах математического ожидания и ковариационной матрицы [4, 7]. Важнейшим условием изучаемой задачи является смещенность оценок. Из-за этого точная граница для наихудшей вероятности ошибки не может быть получена с помощью неравенства Маркова, а алгоритмическое решение, основанное на переходе к задаче полуопределенного программирования [10], приводит к задаче большой размерности. Указанную проблему можно решить за счет использования явного вида многомерной границы Селберга [1]. В итоге искомая оценка получается применением численных методов пакета cvx [6]. Сравнительный анализ полученных статистических решений проведен на примере задачи, в которой требовалось восстановить траекторию движения цели с ограниченным ускорением.

## 2. Постановка задачи

Допустим, что гладкий сигнал  $x(t) \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$ , такой что  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  и  $|\ddot{x}(t)| \leq w$ , требуется восстановить по наблюдениям  $Y(t_k) = x(t_k) + \eta(t_k)$  в конечном множестве точек  $\{t_k, k = 1, \dots, N\}$  при условии, что случайные помехи являются центрированными некоррелированными величинами с одинаковой дисперсией  $\sigma^2$ .

Данную модель запишем в операторном виде

$$(1) \quad x = A\theta, \quad \theta \in \Theta, \quad Y = B\theta + \eta, \quad \eta \sim \mathcal{P}(0, \sigma^2 I_N),$$

где  $x$  – сигнал, как элемент пространства  $\mathbf{H} = L_2[0, T]$ ;  $\theta = \ddot{x}$  – вторая производная сигнала;  $Y$  и  $\eta$  – вектор наблюдения и вектор помех, как элементы евклидова пространства  $\mathbb{R}^N$ ;  $\Theta$  – шар радиуса  $w$  в пространстве кусочно-непрерывных функций  $\mathbf{K}$  (это пространство снабжено нормой  $\|\theta\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in [0, T]} |\theta(t)|$ ); условие  $\eta \sim \mathcal{P}(\mu, R)$  означает  $\mathbf{M}\eta = \mu$  и  $\text{cov}\{\eta, \eta\} \preceq R$ ;  $I_N$  – единичная  $N \times N$  матрица;  $A: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{H}$  и  $B: \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}^N$  – интегральные операторы, порожденные интегральным ядром  $g(u) = \max\{u, 0\}$ :  $(A\theta)(t) = \int_0^T g(t - \tau) \theta(\tau) d\tau$ ,  $(B\theta)(t_k) = \int_0^T g(t_k - \tau) \theta(\tau) d\tau$ .

Рассмотрим вероятность превышения  $L_2$ -нормой  $\|\varepsilon\| = (\int_0^T \varepsilon^2(t) dt/T)^{1/2}$  ошибки оценивания  $\varepsilon = \tilde{x} - x$  заданного порога  $h$  как целевой функционал:  $\mathbf{P}\{\|\tilde{x} - x\| \geq h\}$ . Он называется далее *вероятностью ошибки* и подлежит минимизации за счет выбора оценок  $\tilde{x} = F_Y$ . Допустим, что операторы  $F$  имеют вид  $(F_C Y)(t) = \sum_{k=1}^N f(t, t_k) Y(t_k)$ , где функции  $f(t, t_k) = \sum_{p=1}^P \beta_p(t) c_p(t_k)$  порождены квадратичными B-сплайнами  $\{\beta_p(t), p = 1, \dots, P\}$  с заданными узлами  $T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_P = T < T_{P+1} < T_{P+2}$  и параметризованы  $P \times N$  матрицей коэффициентов  $C = \{c_p(t_k)\}_{p=1, \dots, P, k=1, \dots, N}$ . Тогда оптимизационная постановка задачи робастного оценивания имеет вид: найти минимаксную оценку  $\hat{x} = \hat{F}Y$ , т.е.

$$(2) \quad \hat{F} = F_{\hat{C}}: \quad \hat{C} = \arg \min_{C \in \mathbb{R}^{P \times N}} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{P}(0, \sigma^2 I_N)} \mathbf{P}_\theta\{\|F_C Y - x\| \geq h\}.$$

Оптимум в задаче (2) назовем *минимаксным значением вероятности ошибки*  $\hat{\alpha}$ .

### 3. Среднеквадратичная задача оценивания

Оценим сверху вероятность ошибки с помощью неравенства Маркова:

$$(3) \quad \mathbb{P}_\theta \{ \|FY - X\| \geq h \} \leq M_\theta \|FY - X\|^2 / h^2,$$

где с.к. ошибка  $M_\theta \|FY - X\|^2$  состоит из квадрата смещения  $R_\theta(F) = \|(FB - A)\theta\|^2$  и суммарной дисперсии ошибки  $D(F) = \sigma^2 \text{tr}[FF^*] = (\sigma^2/T) \int_0^T \sum_{k=1}^N f^2(t, t_k) dt$ . Для оценки смещения воспользуемся следующим неравенством:  $\sup_{\theta \in \Theta} R_\theta(F) \leq w^2 \|\psi\|_1^2$ , где  $\|\psi\|_1^2 = (1/T) \int_0^T (\int_0^T |\psi(t, \tau)| d\tau)^2 dt$  и  $\psi(t, \tau) = \sum_{k=1}^N f(t, t_k)g(t_k - \tau) - g(t - \tau)$ .

Пусть  $\|\cdot\|_F$  - фробениусова норма,  $G$  -  $P \times P$  матрица Грама, составленная из скалярных произведений  $G_{p,q} = (\beta_p, \beta_q) = (1/T) \int_0^T \beta_p(t)\beta_q(t) dt$ , а  $H$  - матрица из разложения  $G = H^T H$ . Тогда из представления оператора  $F_C$  через сплайны следует  $D(F_C) = \sigma^2 \sum_{k=1}^N \sum_{p,q=1}^P c_p(t_k)G_{p,q}c_q(t_k) = \sigma^2 \text{tr}[C^T G C] = \sigma^2 \|HC\|_F^2$ . Верхнюю границу смещения представим с помощью приближенной схемы интегрирования на равномерной сетке  $\{s_i\}_{i=1,\dots,M}$ :  $R(F_C) = (w^2 T^2 / M^3) \sum_{i=1}^M (\sum_{j=1}^M |\psi(s_i, s_j)|)^2 \approx w^2 \|\psi\|_1^2$ .

Отсюда получаем *среднеквадратичную задачу робастного оценивания*

$$(4) \quad \hat{x}_{\text{mse}} = F_{C_{\text{mse}}} Y: \quad C_{\text{mse}} = \arg \min_{C \in \mathbb{R}^{P \times N}} \{D(F_C) + R(F_C)\},$$

Если ввести матрицы  $A = \{g(s_i - s_j)\}_{i,j=1,\dots,M}$ ,  $B = \{g(t_k - s_i)\}_{k=1,\dots,N, i=1,\dots,M}$ ,  $\text{beta} = \{\beta_p(s_i)\}_{i=1,\dots,M, p=1,\dots,P}$ , то задачу (4) можно сформулировать с помощью спецификаций пакета `cvx`.

**Алгоритм 1** (среднеквадратичная задача робастного оценивания).

Входные данные: `sigma w T P N M H(P,P) beta(M,P) B(N,M) A(M,M)`

`cvx_begin`

`variables C(P,N) D R;`

`minimize( D + R );`

`subject to`

`sigma^2 * square_pos(norm(H*C, 'fro')) <= D;`

`w^2 * T^2 / M^3 * sum(square_pos(sum(abs(beta*C*B-A), 2))) <= R;`

`cvx_end`

Выходные данные: `C` % матрица коэффициентов оценивателя  $F_{C_{\text{mse}}}$

`D` % суммарная дисперсия  $D(F_{C_{\text{mse}}})$

`R` % верхняя граница квадрата смещения  $R(F_{C_{\text{mse}}})$

Теперь по неравенству Маркова получаем верхнюю оценку для минимаксного значения вероятности ошибки:  $\hat{\alpha} \leq \alpha_{\text{mse}} = \min \{ (D(F_{C_{\text{mse}}}) + R(F_{C_{\text{mse}}})) / h^2, 1 \}$ .

### 4. Применение многомерной границы Селберга

Для вероятности выхода случайного вектора  $\zeta$  с ненулевым  $M\zeta$  за границы шара в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  имеется *многомерная граница Селберга* [1]:

$$(5) \quad \pi_h^{(n)}(r, c) = \sup_{\zeta \sim \mathcal{P}(b, c^2 I_n), |b| \leq r} \mathbb{P}(|\zeta| \geq h) = \left( 1 + \frac{(\sqrt{nh^2 - (n-1)(nc^2 + r^2)} - r)^2}{n^2 c^2} \right)^{-1}$$

при условии  $h^2 \geq (nc^2 + r^2)(1 + c^2/r^2)$ .

Однако в переменных  $(r, c, \alpha)$  надграфик  $\pi_h^{(n)}(r, c) \leq \alpha$  оказывается невыпуклым. Поэтому вместо (2) рассмотрим задачу робастного оценивания с квантильным критерием: найти оценку  $\hat{x}_\alpha = F_{C_\alpha} Y$ , которая для заданной вероятности ошибки  $\alpha$  обеспечивает наименьший порог  $h$  из расчета на наихудший случай, т.е.

$$(6) \quad C^\alpha = \arg \min_{C \in \mathbb{R}^{P \times N}} \left\{ h : \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{P}(0, \sigma^2 I_N)} \mathbb{P}_\theta \{ \|F_C Y - x\| \geq h \} \leq \alpha \right\}.$$

Данную формулировку можно свести к задаче выпуклого программирования следующим образом. Ошибка  $\varepsilon = F_C Y - x$  имеет ковариационный оператор  $F_C F_C^*$ , такой что  $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S}$ , где  $\mathbf{R} = \text{im}[F_C F_C^*]$  и  $\mathbf{S} = \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_P\}$ . Если через  $P_S$  обозначить ортопроектор на  $\mathbf{S}$ , то за счет выбора некоторого  $c \in \mathbb{R}$  будет выполнено  $\text{cov}\{\varepsilon, \varepsilon\} \preceq c^2 P_S$ , что равносильно  $\sigma^2 G C C^T G \preceq c^2 G$ , а с помощью матрицы  $H$  это условие эквивалентно  $\sigma^2 H C C^T H^T \preceq c^2 I_P$  или, что то же самое,  $\sigma \|HC\|_S \leq c$ , где  $\|\cdot\|_S$  – спектральная норма. В силу  $\dim[\mathbf{R}] \leq N < P$  границу (5) можно применить к вектору  $\varepsilon \in \mathbf{H}$  как к  $N$ -мерному вектору:  $\mathbb{P}_\theta \{ \|\varepsilon\| \geq h \} \leq \pi_h^{(N)}(r, c)$ , где  $r = R_\theta(F_C)$ .

Теперь с учетом того, что  $\pi_h^{(N)}(r, c) \leq \alpha$  описывает выпуклое множество в переменных  $(h, r, c)$ , получаем задачу выпуклого программирования:

$$(7) \quad h \rightarrow \min : h, r, c \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}^{P \times N} \quad \text{при ограничениях}$$

$$(8) \quad \begin{cases} (N-1)(Nc^2 + r^2) + \left(r + Nc\sqrt{(1-\alpha)/\alpha}\right)^2 \leq Nh^2, \\ (N+1)c^2 + r^2 + N(c^2/r)^2 \leq h^2, \quad R(F_C) \leq r^2, \quad \sigma \|HC\|_S \leq c. \end{cases}$$

Целевая функция (7) является верхней оценкой порога ошибки  $h$  в минимаксной задаче (6). Поэтому если минимаксное значение вероятности ошибки  $\hat{\alpha}$  вычислено в исходной задаче (2) для порога  $h$ , совпадающего с оптимумом  $h_\alpha$  в задаче (7)–(8) при заданном  $\alpha$ , то получаем верхнюю оценку оптимума в задаче (2):  $\hat{\alpha} \leq \alpha$ .

Теперь задачу (7)–(8) можно сформулировать в терминах пакета `cvx`.

**Алгоритм 2** (задача робастного оценивания с квантильным критерием).

Входные данные: `alpha sigma w T P N M H(P,P) beta(M,P) B(N,M) A(M,M)`

```
cvx_begin
variables C(P,N) aux(M,1) h2 r c;
minimize( h2 );
subject to
(N-1)*(N*c^2+r^2)+(r+N*c*sqrt((1-alpha)/alpha))^2 <= N*h2;
(N+1)*c^2+r^2+N*sqrt_pos(quad_over_lin(c,r))^2 <= h2;
sigma*norm(H*C) <= c;
sum(abs(beta*C*B-A),2) <= aux;
w*T/M^(3/2)*norm(aux) <= r;
cvx_end
```

Выходные данные: `sqrt(h2)` % Минимаксное значение порога ошибки  $h_\alpha$   
`C` % Матрица коэффициентов оценщика  $F_{C_\alpha}$   
`c^2*N` % Граница дисперсии  $D(F_{C_\alpha}) = \sigma^2 \|HC_\alpha\|_F^2 \leq c^2 N$   
`r` % Максимальное смещение  $\sqrt{R(F_{C_\alpha})}$

Численный эксперимент был проведен при следующих условиях: интервал времени  $T = 30$  с, модуль ускорения ограничен  $w = 1.1$  м/с<sup>2</sup>, с.к.о. помех  $\sigma = 1$  м,  $N = 10$  наблюдений получены на равномерной временной сетке, взяты  $P = 16$  В-сплайнов и  $M = 30$  точек в приближенной схеме интегрирования.

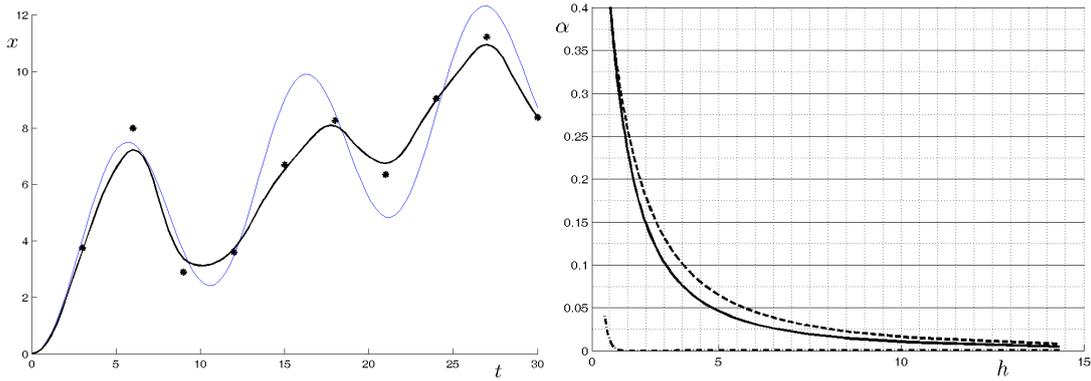


Рис. 1. Слева: сигнал (синяя линия), минимаксная оценка (черная), наблюдения (точки). Справа: зависимость  $\alpha$  от  $h$  для границы Селберга (сплошная), границы Маркова (штриховая), нормального распределения (штрих-пунктир)

На левом графике рис. 1 изображена траектория цели  $x(t)$ , ее минимаксная оценка  $\hat{x}(t)$  и наблюдения  $\{Y(t_k)\}$ , а на правом графике – зависимость вероятности ошибки  $\alpha$  от порога  $h$  минимаксной оценки при использовании точной вероятностной границы (5), границы из неравенства Маркова (3) и нормального распределения. При  $\alpha = 0,05$  алгоритм 2 выдал значение порога  $h_\alpha = 4,84$  м, что при использовании алгоритма 1 и границы (3) дает вероятность ошибки  $\alpha_{\text{mse}} > 0,07$ , а при нормальных помехах оказывается  $P\{\|\hat{x} - x\| \geq h_\alpha\} < 10^{-8}$ . Таким образом, граница Маркова приводит к перестраховочному результату, а гипотеза о гауссовости к неоправданно оптимистичным выводам. Следовательно, метод, основанный на многомерной границе Селберга, занимает промежуточное положение между этими подходами.

## Список литературы

1. Arkhipov A.S., Semenikhin K.V. A multivariate Chebyshev bound of the Selberg form // Automation and Remote Control. 2022. Vol. 83, No. 8. P. 1180–1199.
2. Blanchet J., Murthy K., Si N. Confidence regions in Wasserstein distributionally robust estimation // Biometrika. 2022. Vol. 109, No. 2. P. 295–315.
3. Chen R., Paschalidis I.C. Distributionally robust learning // Foundations and Trends in Optimization. 2020. Vol. 4, No. 1–2. P. 1–243.
4. Delage E., Ye Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems // Operations Research. 2010. Vol. 58. P. 595–612.
5. El Ghaoui L., Oks M., Oustry F. Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach // Operations Research. 2003. Vol. 51. P. 543–556.
6. Grant M.C., Boyd S.P. The CVX Users' Guide. Release 2.2. CVX Research, Inc. 2020 <http://cvxr.com/cvx/doc/CVX.pdf> (дата обращения: 01.01.2024).
7. Kogan M.M. Robust estimation and filtering in uncertain linear systems under unknown covariations // Automation and Remote Control. 2015. Vol. 76, No. 10. P. 1751–1764.
8. Lin F., Fang X., Gao Z. Distributionally robust optimization: A review on theory and applications // Numerical Algebra, Control & Optimization. 2022. Vol. 12, No. 1. P. 159–212.
9. Marshall A.W., Olkin I. Multivariate Chebyshev inequalities // Annals of Mathematical Statistics. 1960. Vol. 31, No. 4. P. 1001–1014.
10. Vandenberghe L., Boyd S., Comanor K.: Generalized Chebyshev bounds via semidefinite programming // SIAM Review. 2007. Vol. 49, No. 1. P. 52–64.
11. Zymler S., Kuhn D., Rustem B. Distributionally robust joint chance constraints with second-order moment information // Mathematical Programming. 2013. Vol. 137. P. 167–198.