

УДК 550.83, 681.51

## Оценивание кажущихся сопротивлений среды при помощи субоптимального анизотропийного фильтра

**Д.К. Хлюстов**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: hlustov.d@gmail.com

**И.Р. Белов**

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: ivbelov93@ipu.ru

**Ключевые слова:** аэроэлектроразведка, горизонтально-слоистая модель, фильтр Калмана, анизотропийная теория, анизотропийный оценщик

**Аннотация:** В данной работе рассматривается задача синтеза субоптимального анизотропийного оценщика для линейной дискретной стационарной системы, моделирующей распределение кажущихся сопротивлений среды.

### 1. Введение

Аэроэлектроразведка является популярным методом сбора геофизических данных. На летательный аппарат (как правило, вертолет или беспилотник) устанавливаются источник и приемник переменного электромагнитного поля. При пролете над местностью происходит регистрация сигнала, отраженного от поверхности. За счет высокой точности позиционирования приемника и передатчика становится возможным исключить влияние первичного поля на измерения и рассматривать зарегистрированный сигнал в качестве отклика среды на излучение вертикального магнитного диполя [8].

Одним из важных геологических параметров среды являются распределение проводимости. На основании данных аэроэлектроразведки возможно построить модель распределения, расчетные значения отклика которой позволят аппроксимировать собранные данные. При высокой точности аппроксимации можно предполагать, что построенная модель в том или ином смысле близка истинным значениям проводимости.

Задачу построения модели распределения можно считать задачей оценивания, поскольку целью поставленной задачи является получение оценки значений сопротивлений среды по слоям в конкретных точках, которые и формируют распределение проводимости, на основании данных измерений отклика. Для решения данной задачи можно воспользоваться фильтром Калмана [9], однако

подобный выбор может оказаться не оптимальным, поскольку стохастические характеристики шумов в датчиках и других случайных возмущений могут быть далеки от гауссовского белого шума, для которого фильтр Калмана и используется. Поэтому в данной работе будет использоваться метод субоптимальной анизотропной фильтрации.

## 2. Постановка задачи

Поведение электромагнитного поля хорошо моделируется уравнениями Максвелла. Однако поскольку методы решения уравнений в частных производных, основанные на аппроксимации конечными элементами, приводят к большому объему вычислений, для расчетов часто применяются упрощенные модели, такие как модель горизонтально-слоистой среды [8]. При такой постановке считается, что среда состоит из бесконечных однородных горизонтальных слоев, толщины и сопротивления которых подлежат определению. В этом случае можно записать отклик в аналитической форме:

$$H_z(\omega) = \int_0^\infty u(n_0, z, h_T, \omega) J_0(n_0 r) n_0^2 dn_0,$$

где  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $r$  – горизонтальное смещение приемника относительно передатчика,  $h_T$  – высота передатчика над поверхностью земли,  $z$  – высота приемника. Двумерный спектр потенциала вторичного поля определяется по формуле

$$u(n_0, z, h_T, \omega) = \frac{M \exp(-n_0(z + h_T))}{2} \cdot \frac{n_1 - n_0 R}{n_1 + n_0 R},$$

где  $M$  – дипольный момент,  $R$  – приведенный спектральный импеданс среды. В случае, если среда содержит  $K$  слоев, он выражается в виде

$$R = \tanh(n_1 h_1 + \tanh^{-1}(\frac{n_1}{n_2} \tanh(\dots (n_{K-1} h_{K-1} + \tanh^{-1} \frac{n_{K-1}}{n_K}))))).$$

В этой формуле  $n_k = \sqrt{n_0^2 - \frac{i\omega\mu_0}{\rho_k}}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн/м – диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\rho_k$ ,  $h_k$  – сопротивление и толщина  $k$ -го слоя.

Поскольку рассматривается фиксированная точка однородной среды, вектор сопротивлений по всем слоям в данной точке остается неизменным. В качестве математической модели среды в фиксированной точке пространства (см. Рис. 1) выбрано приближение посредством линейной дискретной стационарной системы

$$(1) \quad T_{zw} \sim \begin{cases} x_{k+1} = x_k, \\ y_k = C_i x_k + w_k, \\ z_k = x_k, \end{cases}$$

где  $k = 0, 1, \dots, N$ ;  $x_k \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  – вектор кажущихся сопротивлений среды  $\rho_k$  с начальным условием  $x_0$ ;  $n_x$  – количество горизонтальных слоев среды;  $y_k \in \mathbb{L}_2^{p_y}$  – вектор измеряемого выхода (отклика среды  $H_z$ );  $C_i = F(\hat{z}_N, i)$  – заданная программно нелинейная функция от  $N$ -ой оценки вектора сопротивлений среды на

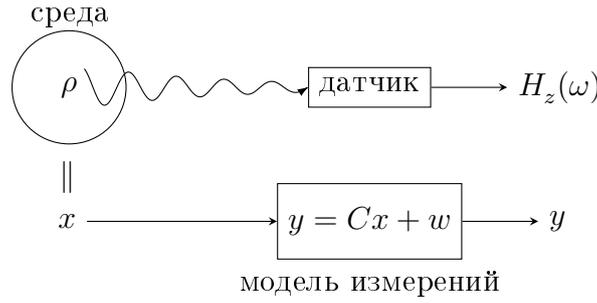


Рис. 1. Схематическое изображение связи процесса сбора реальных данных и моделирования их линейной системой

итерации, предшествующей  $i$ -ой;  $z_k \in \mathbb{L}_2^{n_x}$  – вектор выхода системы;  $w_k \in \mathbb{L}_2^{m_w}$  – вектор входа системы, который включает в себя шумы датчиков и расхождение между реальными значениями откликов и их линейным представлением в системе.

Задача оценивания заключается в поиске оценки  $\hat{z}_k$  вектора-выхода  $z_k$  системы

$$(2) \quad T_{\hat{z}_w} \sim \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k, \\ \hat{z}_k = \hat{x}_k + M_i(y_k - C_i \hat{x}_k), \end{cases}$$

где  $M_i$  – матрица оценивателя, подлежащая определению;  $i$  – номер внешней итерации,  $i = 1, \dots, \mathcal{I}$ . Внешние итерации введены для проведения процесса уточнения матрицы  $C_i$  так, чтобы наилучшим в среднеквадратичном смысле с учетом оговариваемых ограничений приблизить реальные измерения  $H_z(\omega)$  моделируемым процессом  $y_k$ .

### 3. Основной результат

Задача субоптимальной анизотропийной фильтрации при заданной верхней границе средней анизотропии [1], [2]  $a$  входного возмущения заключается в синтезе оценивателя, обеспечивающего ограниченность анизотропийной нормы [3] системы в ошибках оценивания величиной  $\gamma$  при условии минимизации последней. Система в ошибках оценивания с учетом (1), (2) имеет вид

$$T_{\tilde{z}_w} \sim \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k, \\ \tilde{z}_k = (I_{n_x} - M_i C_i) \tilde{x}_k - M_i w_k. \end{cases}$$

В [4] представлено решение задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации для линейной дискретной стационарной системы. Применяя ее, получим следующий результат.

**Теорема 1.** *Дана линейная дискретная стационарная система  $T_{z_w}$  вида (1), которая является детектируемой и  $\text{rank } D_y = \text{rank } I_{p_y} = p_y$ . Также заданы скалярные величины  $a \geq 0$  и  $\gamma \geq 0$ . Существует оцениватель  $T_{\tilde{z}_w}$  вида (2), при котором справедливо  $\|T_{\tilde{z}_w}\|_a$ , если система из линейных матричных неравенств*

$$(3) \quad \begin{bmatrix} X & * & * \\ O_{m_w \times n_x} & \eta I_{m_w} & * \\ (I_{n_x} - M_i C_i) & -M_i & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi & * \\ -M_i & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0$$

и неравенства специального вида

$$(4) \quad \eta - (e^{-2a} \det \Psi)^{1/m_w} < \gamma^2$$

разрешима относительно матриц  $X = X^T \succ 0$ ,  $\Psi = \Psi^T \succ 0$ ,  $M_i$  и скалярной переменной  $\eta > \gamma^2$ .

Поставленная задача синтеза субоптимального анизотропийного оценителя решается по следующему алгоритму:

1.  $i = 1$ , начало внешней итерации. Задаем  $x_0$ .
2.  $k = 0$ , начало внутренней итерации. Задаем  $\hat{z}_N = x_0$ .
  - 2.1. Вычисляем  $C_i = F(\hat{z}_N, i)$ . Решаем систему неравенств (3), (4). Вычисляем  $\hat{z}_{k+1}$ . Увеличиваем значение счетчика  $k \rightarrow k + 1$ .
  - 2.2. Если  $k = N + 1$ , то окончание внутренней итерации и переход на шаг 3. Иначе – возврат на шаг 2.1.
3. Увеличиваем значение счетчика  $i \rightarrow i + 1$ .
4. Если  $i = \mathcal{I}$ , то окончание внешней итерации и переход на шаг 5. Иначе – возврат на шаг 2.
5. Принимаем за истинное значение матрицы  $M$  значение  $M_{\mathcal{I}}$ , найденное на последнем шаге решения. Формируем оценку  $\hat{z}_N$  сопротивлений среды по слоям.

Ниже представлены результаты численного моделирования описанного выше алгоритма решения задачи в виде диаграмм распределения сопротивлений по слоям и внешним итерациям при использовании фильтра Калмана и субоптимального анизотропийного оценителя для построения искомой оценки. При расчете средней анизотропии не был учтен факт распределения собственных чисел ковариационной матрицы ошибок на условные группы больших, средних и малых значений. Учет данного свойства может позволить улучшить картину распределения найденных значений сопротивлений по слоям.

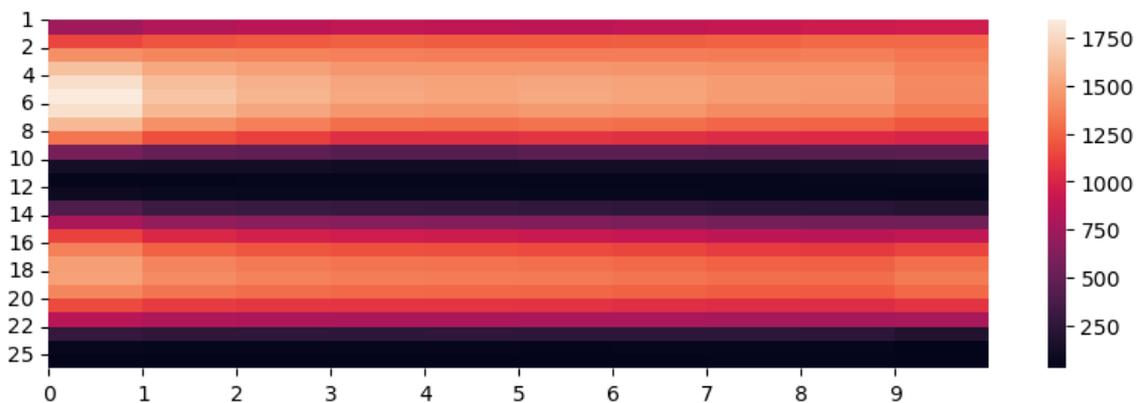


Рис. 2. Распределение сопротивлений по слоям при фильтре Калмана

Из рисунков видно, что распределения сопротивлений, полученных в результате применения обоих фильтров обладают слоистой структурой. Это согласуется с имеющимися представлениями о геологических свойствах местности, в которой производился сбор данных. Отличие рисунков друг от друга в смысле картины

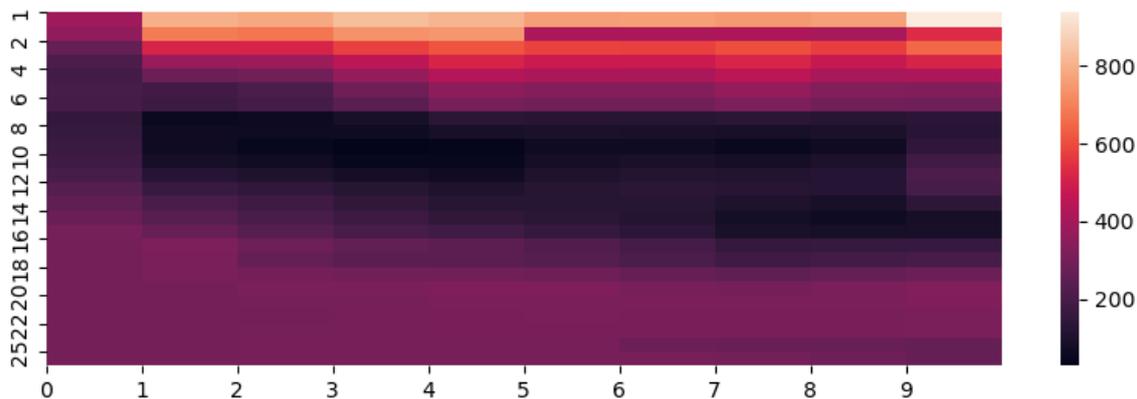


Рис. 3. Распределение сопротивлений по слоям при анизотропном оценителе

распределения слоев обусловлено тем, что при построении фильтра Калмана предполагаются известные априорные статистические характеристики шумов, а в случае анизотропного фильтра они считаются неизвестными точно, что вносит большую неопределенность. Эта неопределенность и отражается менее четкими границами между слоями.

## 4. Заключение

В данной работе исследовалась возможность применения анизотропного фильтра для оценки одного из важнейших параметров геологического разреза - пространственного распределения сопротивлений. В целях снижения объема вычислений была использована одномерная горизонтально-слоистая модель проводящей среды с фиксированной толщиной слоев. По результатам анализа реальных данных было выяснено, что сопротивления, оцененные фильтром Калмана и анизотропным фильтром имеют структуру, согласующуюся с представлениями о геологических характеристиках местности, в которой собирались данные.

## Список литературы

1. Semyonov A. V., Vladimirov I. G., Kurdjukov A. P. Stochastic approach to  $\mathcal{H}_\infty$ -optimization // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Florida, USA. December 14–16. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
2. Vladimirov I. G., Kurdjukov A. P., Semyonov A. V. Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Dokl. Math. 1995. V.51. P. 388–390.
3. Vladimirov I. G., Kurdjukov A. P., Semyonov A. V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant Systems // Proc. 13 IFAC World Congress. 1996. P. 179–184.
4. Timin V.N., Tchaikovsky M. M., Kurdyukov A. P. A Solution to Anisotropic Suboptimal Filtering Problem by Convex Optimization // Doklady Mathematics, 2012, Vol. 85, No. 3, pp. 443–445.
5. Zhdanov M. S. Geophysical electromagnetic theory and methods. Elsevier, 2009.
6. Karshakov E. Iterated extended Kalman filter for airborne electromagnetic data inversion // Exploration Geophysics, 2020, Vol. 51, No. 1, pp. 66-73.