

УДК 519.6, 654.1

# Метод регуляризации в задачах оптимизации линейного эквалайзера

**Ч. Чжан***Московский физико-технический институт*

Россия, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: zhibin@phystech.edu

**В.А. Ляшев***Московский физико-технический институт*

Россия, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: lyashev.va@mipt.ru

**Ключевые слова:** метод регуляризации, закон Марченко-Пастура, приемник IRC, фильтр Винера, модель spiked, ММО, инверсия корреляционной матрицы

**Аннотация:** В данной работе исследуются свойства матрицы, обратной корреляционной матрице в условиях окрашенной помехи и белого шума. Авторам удалось аналитически записать оптимальное значение параметра регуляризации, используя закон распределения Марченко-Пастура и Spiked-модель, что повысило точность оценки обратной корреляционной матрицы. Данный результат позволяет сделать теоретическое обоснование регуляризации приемников в системах беспроводной связи и имеет важное значение для повышения устойчивости сетей связи.

## 1. Введение

В современной обработке цифровых сигналов широко используются алгоритмы, которые основаны на принципах фильтрации Винера. Эффективность данных алгоритмов обусловлена зависимостью от корреляционной матрицы. В силу отсутствия доступа к реальной корреляционной матрице, принято использовать оцененные значения, полученные на основе измерений – оценку корреляционной матрицы на ограниченной выборке. Когда размер выборки  $N$  существенно превосходит размерность  $M$  корреляционной матрицы, такая оценка является состоятельной. Однако, в более общем случае, например, в ММО-системах беспроводной связи, когда количество датчиков  $M$  велико и сопоставимо с размером выборки  $N$ , ошибка в оценке корреляционной матрицы может быть значительной, что негативно сказывается на эффективности работы фильтра Винера.

Регуляризация представляет собой эффективный метод повышения устойчивости системы. Этот метод также известен как регуляризация Тихонова или

ридж-регрессия (Ridge Regression).

$$(1) \quad \mathbf{R}_{xx} = \frac{1}{N} \mathbf{X}\mathbf{X}^H + \gamma \mathbf{I},$$

где  $\gamma$  – параметр регуляризации. В англоязычной литературе по обработке многомерных сигналов этот метод регуляризации часто описывается как «диагональная нагрузка» (Diagonal Loading), что подразумевает добавление фиксированной константы на диагональ оцененной корреляционной матрицы с целью улучшения робастности оценки (уменьшения ее дисперсии).

Можно выделить два основных подхода. Первый подход направлен на оптимизацию оценки корреляционной матрицы с целью минимизации среднеквадратичной ошибки (Mean Square Error, MSE) выборочной корреляционной матрицы [1, 2], стремясь найти приближение к оптимальной оценке корреляционной матрицы. Однако, эффективность этого метода часто не является достаточной, поскольку для построения фильтра Винера используется не сама корреляционная матрица, а ее инверсия. Второй подход использует максимизацию отношения сигнал/шум плюс помеха (Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio, SINR) [3, 4]. Хотя этот метод может обеспечить оптимальную производительность, он требует более сложных вычислений, которые могут превышать сложность самого фильтра Винера.

Обратную матрицу корреляции принято называть «матрицей точности» (Precision Matrix). В данной работе регулируется оценка матрицы точности, что приводит к поиску оптимального параметра регуляризации. Доказывается, что при таком подходе функция потерь может быть описана как белый шум, что значительно упрощает оценку коэффициента регуляризации.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим восходящий канал MIMO-OFDM с одной базовой станции, где полоса пропускания разделена на  $N$  поднесущих. Базовая станция оснащена  $N_r$  антеннами, и существует  $N_t$  передающих антенн, моделируется как:

$$(2) \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{u}_n$$

где  $\mathbf{y}_n \in \mathbb{C}^{N_r}$  – приемный сигнал на поднесущей  $n$ ,  $\mathbf{H}_n \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$  – матрица канала системы MIMO на поднесущей  $n$ ,  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{C}^{N_t}$  – вектор данных, переданный на поднесущей  $n$ ,  $\mathbf{u}_n \in \mathbb{C}^{N_r}$  – вектор суммы аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2$  и помехи от не целевых пользователей на поднесущей  $n$ .

Задача оптимального приема заключается не только в подавлении шума, но и в эффективном снижении интерференции. Чаще всего используются линейные приемники из-за их устойчивости и низкой вычислительной сложности. Линейный приемник компенсирует влияние канала с помощью линейного преобразования:

$$(3) \quad \hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{W} \mathbf{y}_n, \quad \hat{\mathbf{x}}_n \in \mathbb{C}^{N_t}, \quad \mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_r}$$

$\hat{\mathbf{x}}_n$  – оцененный приемный сигнал,  $\mathbf{W}$  – матрица линейного приемника.

В данной работе используется приемник IRC, который подавляет помеху:

$$(4) \quad \mathbf{W}_{\text{IRC}} = \mathbf{R}_{xy}(\mathbf{R}_{yy})^{-1} = \mathbf{H}^H(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{uu})^{-1}$$

где  $\mathbf{R}_{uu}$  корреляционная матрица  $\mathbf{u} + \mathbf{z}$ . После несложного преобразования получим более простое уравнение:

$$(5) \quad \mathbf{W}_{\text{IRC}} = (\mathbf{H}^H \mathbf{R}_{uu}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{R}_{uu}^{-1}$$

Как видно из выражения (5), производительность приемника IRC в основном зависит от матрицы точности  $\mathbf{R}_{uu}^{-1}$ , а не от корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_{uu}$ . Поэтому использование матрицы точности в качестве объекта оптимизации может улучшить производительность приемника, что экспериментально было продемонстрировано в работе [5].

В данной работе сделана попытка получить аналитическую оценку параметра регуляризации. Как итог, целью оптимизации в данной статье является минимизация среднеквадратичной ошибки оценки матрицы точности

$$(6) \quad \gamma_{opt} = \arg \min_{\gamma} \|(\hat{\mathbf{R}}_{uu} + \gamma \mathbf{I})^{-1} - \mathbf{R}_{uu}^{-1}\|_2$$

где  $\hat{\mathbf{R}}_{uu} = \frac{1}{N} \mathbf{U}\mathbf{U}^H$  - это оценка корреляционной матрицы на ограниченной выборке  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N_r \times N}$ .

### 3. Spiked-модель

В системах MIMO ранг помех обычно значительно меньше, чем количество приемных антенн. Таким образом, корреляционная матрица между пользователями  $\mathbf{R}_{uu}$  может рассматриваться как низкоранговое возмущение корреляционной матрицы белого шума  $\sigma^2 \mathbf{I}$ . В теории случайных матриц такое низкоранговое возмущение шумовой матрицы обычно называется «моделью с шипами» (Spiked Model) [6].

Исследования spiked-модели подтверждают, что если большинство собственных значений корреляционной матрицы одинаковы и только несколько из них являются возмущающими, то в таких условиях собственные значения корреляционной матрицы все еще соответствуют закону Марченко-Пастура. Однако за пределами распределения Марченко-Пастура можно наблюдать изолированные собственные значения, как показано на рисунке 1.

Таким образом, можем установить, что минимальное собственное значение  $\hat{\mathbf{R}}_{uu}$  зависит только от отношения размера выборки к дисперсии шума. Аналогично, матрица точности помех и шума будет стремиться к матрице точности соответствующей белому шуму и иметь диагональный вид

$$(7) \quad \|(\hat{\mathbf{R}}_{uu} + \gamma \mathbf{I})^{-1} - \mathbf{R}_{uu}^{-1}\|_2 \longrightarrow \|(\hat{\mathbf{R}}_{uu} + \gamma \mathbf{I})^{-1} - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I}\|_2.$$

Таким образом, опираясь на закон Марченко-Пастура, можно определить оптимальный фактор регуляризации:

$$(8) \quad \gamma_{opt} = \frac{\sqrt{16c + 1} - 1}{2} \sigma^2 - c\sigma^2, \quad c = \frac{N_r}{N},$$

где  $N_r$  - количество приемных антенн,  $N$  - размер выборки поднесущих частот для оценки  $\mathbf{R}_{uu}$ .

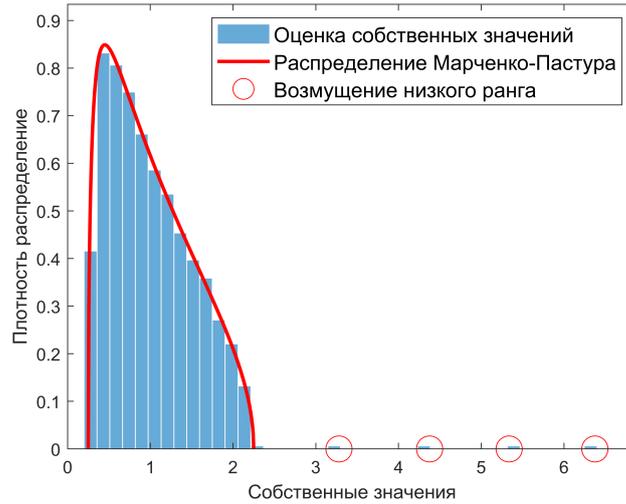


Рис. 1. Модель Spiked 4 ранга возмущения

## 4. Численные результаты оптимизации

Здесь приводится результат моделирования восходящего канала с 4 передающими и 64 приемными антеннами. Цифровой приемник работает в режиме IRC с регуляризацией. Оценка матрицы  $\mathbf{R}_{uu}$  выполнена на 96 поднесущих частотах OFDM-сигнала (типичный размер блока в LTE/5G системах), используется идеальная оценка дисперсии шума  $\sigma^2$ . Моделирование канала связи выполнялось программным пакетом Quadriga 2.x [7]. На рисунке 2 приводится

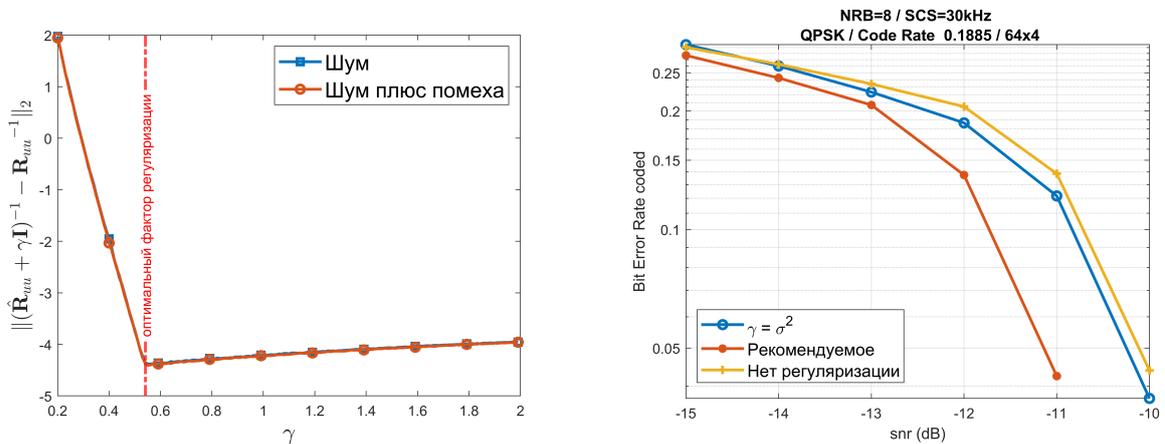


Рис. 2. Моделирование приемника с регуляризованной матрицей: (слева) зависимость невязки матрицы точности от параметра регуляризации для  $\sigma^2 = 1$ ; (справа) чувствительность приемника при разных методах регуляризации

эмпирическая оценка параметра регуляризации (левый график), из которого видно, что среднеквадратичная ошибка матрицы точности не подвержена влиянию интерференции. Кривые функции потерь в случае белого шума и в случае помехи и шума практически идентичны. Видно, что минимум функции невязки

определяет оптимальный параметр регуляризации экспериментально (из графика  $\gamma_{opt} \approx 0.55$ ). Если параметры системы подставить в выражение (8), то получим  $\gamma_{opt} = \frac{\sqrt{16 \cdot 64/96 + 1} - 1}{2} \sigma^2 - 64/96 \cdot \sigma^2 = 0.54$ .

Традиционно, используется оценка дисперсии шума в качестве параметра регуляризации. Такой подход был правомерен, когда антенная система была низкого разрешения и интерференция присутствовала в виде квази-белого шума, что просто изменяло величину дисперсии эквивалентного шума. Но рост числа антенн на базовых станциях увеличил пространственное разрешение системы и интерференционные сигналы уже нельзя приближать белым шумом, откуда и возникла потребность в оценке параметра регуляризации  $\gamma \neq \sigma^2$ . Рисунок 2 наглядно демонстрирует это. Так  $\gamma = 0.54 < \sigma^2 = 1$  на левом рисунке, а кривая битовых ошибок в приемнике сместилась на 1дБ (рисунок справа). Таким образом, предложенная оценка параметра регуляризации соответствует критерию оптимальности (6) и улучшает чувствительность приемника на 1дБ.

## 5. Заключение

Проанализирована значимость обратной корреляционной матрицы (матрицы точности) в системах MIMO беспроводной связи и показано ее прямое влияние на производительность приемника IRC. Используя закон Марченко-Пастура и spiked-модель, предложено аналитическое выражение для оптимального параметра регуляризации. Результаты исследования показали, что кривые функции потерь в сценариях шума и помехи с шумом демонстрируют высокую степень согласованности. Полученный параметр регуляризации повышает точность оценок весовых коэффициентов IRC-приемника. Данный результат позволяет сделать теоретическое обоснование регуляризации приемников в системах беспроводной связи и имеет важное значение для повышения устойчивости сетей связи 5G.

## Список литературы

1. O. Ledoit and M. Wolf, 'A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices', *J. Multivar. Anal.*, Feb. 2004, vol. 88, no. 2, pp. 365–411 .
2. Y. Chen, A. Wiesel, Y. C. Eldar, and A. O. Hero, 'Shrinkage Algorithms for MMSE Covariance Estimation', *IEEE Trans. Signal Process.*, Oct. 2010, vol. 58, no. 10, pp. 5016–5029, .
3. X. Mestre and M. A. Lagunas, 'Finite sample size effect on minimum variance beamformers: optimum diagonal loading factor for large arrays', *IEEE Trans. Signal Process.*, Jan. 2006, vol. 54, no. 1, pp. 69–82 .
4. M. Zhang, F. Rubio, D. P. Palomar, and X. Mestre, 'Finite-Sample Linear Filter Optimization in Wireless Communications and Financial Systems', *IEEE Trans. Signal Process.*, Oct. 2013? vol. 61, no. 20, pp. 5014–5025.
5. Vladimir Lyashev, Ivan Oseledets, and Delai Zheng. "Tensor-based multiuser detection and intra-cell interference mitigation in LTE PUCCH." In Proc. TELFOR 2013, pages 385-388.
6. Benaych-Georges, Florent, and Raj Rao Nadakuditi. "The singular values and vectors of low rank perturbations of large rectangular random matrices." *Journal of Multivariate Analysis* 111, 2012? pp. 120-135.
7. S. Jaeckel, L. Raschkowski, K. Börner, and L. Thiele, "QuaDRiGa: A 3-D Multi-cell channel model with time evolution for enabling virtual field trials," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Jun. 2014, vol. 62, no. 6, pp. 3242–3256.